应用数学丛书

椭圆函数及其应用

高本庆 编著

国防工业出版社

应用数学丛书

椭圆函数及其应用

高本庆　编著

国防工业出版社

内 容 简 介

本书较全面而简要地论述了椭圆函数的基本内容，以及椭圆函数的若干应用概貌。全书共分十一章。前九章按函数的共性分别介绍了椭圆函数的定义和一般性质，二阶椭圆函数，各种拟椭圆函数的特性及相互关系，任意椭圆函数的各种表示法及三阶椭圆函数，各种椭圆函数的加法公式，椭圆积分，椭圆函数的变换，椭圆模函数，以及将椭圆函数展成三角级数式等。后二章是有关应用方面的内容，第十章介绍了椭圆函数和椭圆积分的保角映射，第十一章介绍了椭圆函数在其他几个方面的应用。

本书可以作为从事椭圆函数及其应用的科技人员的参考书，也可作为有关专业的研究生或高年级学生选修课的教材。

应用数学丛书

椭圆函数及其应用

高本庆　编著

*

国防工业出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号）

（邮政编码100044）

新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

860×1168 1/32　印张$9^1/_2$　244千字

1991年01月第一版　1991年11月第一次印刷　印数：0,001—(2),000册

ISBN 7-118-00636-X/O·53　　定价：7.75元

应用数学丛书目录

＊　为已出版或即将出版的书目

出 版 说 明

近20年来电子工程、控制工程、系统工程及其他领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

从书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

椭圆函数论是一门历史悠久、实用性很强的数学学科。最初关于椭圆积分的研究可以追溯到17世纪中期。在17世纪末，利用椭圆积分的反演得到第一个真正的椭圆函数，尔后的一个世纪中数学家们在定义新函数，分析函数的性质，完善椭圆函数理论方面均做了大量工作，逐渐发展形成一门独立的学科。这些工作直至最近二、三十年仍没有止步（例如三阶椭圆函数是在1964年第一次出现的）。在椭圆函数发展的过程中，表现出它具有很强的实用性，这或许是它能得以迅速发展的一个主要动力。早期关于求椭圆和其他曲线的弧长以及单摆问题的研究有力促进了椭圆积分和椭圆函数的进展。椭圆函数和椭圆积分所能实现的保角映射是任何初等函数无法比拟的，它解决了流体力学、热传导和电磁理论中的一大批实际问题。此外在几何学，特殊坐标下微分过程的解，函数的最佳逼近（包括电子学中椭圆函数滤波器）等问题中，均已取得了良好的应用价值。在当今国内外的主要科技杂志中，所发表的与椭圆函数应用有关的论文是屡见不鲜的。

本书以介绍椭圆函数论的基本内容为主要目的，并适当介绍一些关于应用方面的知识。在内容安排上，尝试着以函数的定义和性质或主要特征作为划分章节的主要线索，而不以一个个函数作为安排的依据，以便突出函数的共性或某种主要属性。例如，我们将同属基本二阶椭圆函数的卫尔斯特拉斯函斯和雅各比函数一同编排在第二章中，而将其他的非双周期函数（拟椭圆函数）安排在第三章内；又如在论述关于椭圆函数变换的第七章中，按函数变换的级数来安排各节的内容等。但也兼顾到历史形成的各函数的独立性，在各章节内对个别函数均赋以独立的节标题或段标题，这样以利于在仅想对某一函数作深入了解时，可以择阅各章

节中的有关内容。

本书共分三大部分。第一部分（包括第一至第四章）主要论述椭圆函数的定义和基本性质，各种函数的基本表示式和特性，以及各函数间的相互关系等。等二部分（包括第五、第七，第九章以及第六和第八章）集中研究椭圆函数在几个方面的性质，这包括各种函数的加法和倍加公式，周期改变时引起椭圆函数的变换和椭圆函数的级数展开式等，此外还介绍与椭圆函数密切联系的椭圆积分及模变换、模函数的概念等。第三部分（包括第十和第十一章）主要介绍椭圆函数的应用概况，包括在保角映射，几何学，偏微分方程的解及函数极值问题等方面的应用。在内容取舍上，本书力图做到较全面些，既考虑到基本和经典的部分，又照顾新近提出的某些内容（如三阶椭圆函数）。在分析方法上以解析法为主，亦兼顾其他流派。由于篇幅的限制，实际上这是很难从愿的。

由于作者水平和编写时间的限制，书中的缺点和错误势必难免，敬请各位专家同行们以及广大读者给予批评指正。

目　录

第一章 引 论

§1.1 从实际问题谈起

我们要研究的椭圆函数是一项具有特殊性质的复变函数。它们与线性微分方程无关，但却与一些不能表示成有限形式的所谓椭圆积分有密切关系。而椭圆积分最初是由诸如求椭圆弧长等实际问题中得到的。故我们首先考虑两个实际例子，引出椭圆积分，然后再引出椭圆函数的概念。

例一 椭圆弧长的计算。由椭圆方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

得

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x^2}{(a^2-x^2)}$$

椭圆的弧长为

$$S=\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_0^x\sqrt{\frac{a^2-k^2x^2}{a^2-x^2}}\,dx$$

$$=a\int_0^t\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt=a\int_0^t\frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\,dt \tag{1.1}$$

式中 $t=x/a$，$k^2=(a^2-b^2)/a^2$。该积分不能表示成有限的形式，称为椭圆积分。

例二 单摆的计算。如图 1.1 所示，设摆锤的初始位置在 M_0 $(z=-l)$，初速度为 v_0。在夹角 θ 处的速度

$$v=l\frac{d\theta}{dt}$$

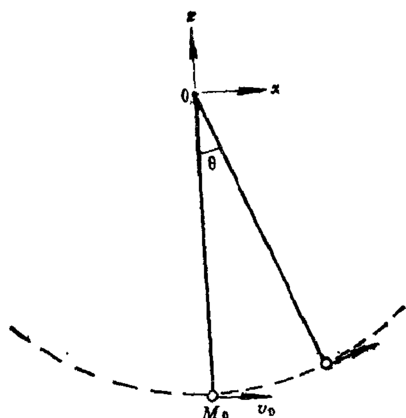


图1.1　单摆

令 g 表示重力加速度，由动能定理得

$$v^2 = 2g(a - z)$$

式中

$$a = -l + \frac{v_0^2}{2g}, \quad z = -l\cos\theta$$

故运动方程为

$$l^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2g(a + l\cos\theta)$$

所以

$$t = l\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{2g(a + l\cos\theta)}}$$

$$= \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{g(a+l)}}\int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \frac{2l}{a+l}\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

令　$x = \sin\frac{\theta}{2}$，$k^2 = \frac{2l}{a+l}$，$c = k^2\sqrt{\frac{a+l}{2g}}$，得

$$t = c\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{1.2}$$

可见单摆运动亦归结为椭圆积分。

椭圆积分的一般形式为

$$\int R(z, w)dz \tag{1.3}$$

式中$R(z, w)$为z和w的有理函数，而

$$w^2=az^4+bz^3+cz^2+dz+e=P(z)$$

多项式$P(z)$高于四次时，称为超椭圆积分。用变量变换可使四次多项式降阶为三次多项式，同时也可以使三次多项式变为四次多项式。例如对于三次多项式

$$P(z)=bz^3+cz^2+dz+e$$

作变换

$$z=\frac{1}{t}$$

则有

$$P\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{1}{t^4}(et^4+dt^3+ct^2+bt)$$

$$w=\frac{1}{t^2}\sqrt{et^4+dt^3+ct^2+bt}$$

根号内变成四次多项式了。当$P(z)$是三次多项式时，可将积分（1.3）简化而得到卫尔斯特拉斯标准形式的第一种，第二种和第三种椭圆积分如下：

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\\&\int\frac{zdz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\\&\int\frac{dz}{(z-c)\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

当$P(z)$是四次多项式，则得到勒让德的三种标准椭圆积分

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\\&\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz\\&\int\frac{dz}{(1+nz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\end{aligned}\right\}\tag{1.5}$$

式中 k 称为模数。可见上述两个例子分别是勒让德型的标准椭圆积分。当模数 $k=0$ 时，勒让德第一种积分化为初等积分

$$u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\arcsin z$$

其反函数 $z=\sin u$ 是众所周知的周期函数。可见三角函数$\sin u$ 是可以藉助积分的反演而得到的。与这相似，我们取 $k\neq 0$ 的椭圆积分

$$u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\tag{1.6}$$

将其反函数记作

$$z=\mathrm{sn}u\tag{1.7}$$

这也是个周期函数，但不只有一个，而是有两个基本上不相同的周期。$\mathrm{sn}u$ 称为雅各比椭圆函数。同理卫尔斯特拉斯第一种椭圆积分

$$u=\int_\infty^z\frac{dz}{\sqrt{4z^3-g_2z-g_3}}\tag{1.8}$$

的反函数

$$z=\mathscr{P}(u)\tag{1.9}$$

称为卫尔斯特拉斯椭圆函数，它也具有两个不相同的周期。以上两种椭圆函数均是由椭圆积分的反演而得到的。后面将要看到由积分反演不是得到该两种函数的唯一方法。

椭圆函数的一个重要特性是其具有双周期性。对于函数 $\mathrm{sn}u$ 可以通过（1.6）式说明之。在复变函数论中已知（1.6）式将上

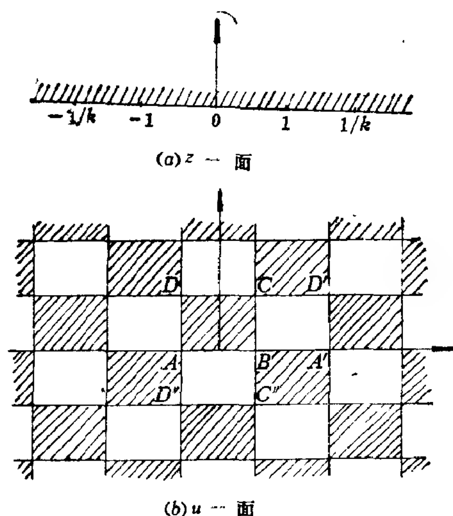


图1.2　$z=\operatorname{sn}u$ 的映射

半个 z 平面映射为 u 平面上的矩形域 $ABCD$(图 1.2)，其各顶点坐标为

$$A(-K);\ B(K);\ C(K+\mathrm{i}K');\ D(-K+\mathrm{i}K')$$

$$K=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$K'=\int_0^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}}$$

k' 为补模数，满足下式

$$k^2+k'^2=1$$

可以对 (1.6) 式函数进行解析延拓。假如经过 z 面实轴上线段（1，$1/k$）由上半平面解析延拓到下半平面，那么(1.6)式将下半平面保角映射为 u 平面上另一个矩形 $BA'D'C$，该矩形是由 $ABCD$ 对于边 BC 反射而得到的，而 BC 是线段(1，$1/k$)

的像。另一方面 AB 是线段（-1，1）的像，如经过线段（-1，1）进行解析延拓，则下半平面映射为以 AB 边反射而得到的矩形 $ABC''D''$。如再由下半平面解析延拓到上半平面，则又将上半平面映射为以 BC'' 为边反射而得到的矩形。这样由一半平面到另一半平面解析延拓下去，则在 u 平面上得到与 $ABCD$ 大小相同的一系列矩形，形成充满了 u 平面的网格，任何两个矩形不相重叠。如图 1.2(b) 所示，其上有斜线的矩形对应上半平面，而空白矩形对应下半平面。

若将图 1.2(b) 上四个有共同顶点的矩形合成一个大矩形，其平行于实轴的边长为 $4K$，平行于虚轴的边长为 $2K'$。不难看出任意 u 点和 $u+4K$ 点位于两个相邻大矩形中的对应点，该两点所对应的 z 值相等。这是因为 $u+4K$ 点是由 u 点对平行于虚轴的边反射二次而得到的，相应地在 z 平面上对实轴反射二次，结果回到了原值。同理 u 点和 $u+i2K'$ 点有类似的结论。故 $4K$ 和 $i2K'$ 是函数 $\mathrm{sn}u$ 的二个周期，即

$$\mathrm{sn}(u+4K)=\mathrm{sn}(u)$$

$$\mathrm{sn}(u+i2K')=\mathrm{sn}(u)$$

下面研究双周期函数的一般问题，然后给出椭圆函数的定义和一般性质。

§1.2 双周期函数

若单值解析函数 $f(u)$ 为**周期函数**，其周期为 2ω，则在它的每一正则点处下列等式成立

$$f(u+2\omega)=f(u)$$

若单值解析函数有二个周期 2ω 和 $2\omega'$，并假定满足 $\mathrm{Im}(\omega'/\omega)>0$，和

$$f(u+2\omega)=f(u),\quad f(u+2\omega')=f(u)$$

则双周期函数一般表示为

$$f(u+2m\omega+2m'\omega')=f(u) \tag{1.10}$$

式中 m，m' 为包括零的任意正或负的整数。

现在来看双周期函数的几何意义。在u平面上从原点o开始分割取线段2ω，$2\omega'$，由于ω'/ω不是实数，故这二线段不在一条直线上，经过2ω和$2\omega'$点，作2ω和$2\omega'$的平行线，交点为$2\omega+2\omega'$。故四个点（o，2ω，$2\omega'$，$2\omega+2\omega'$）相邻二点的连线构成一平行四边形。将平行四边形沿2ω和$2\omega'$的方向平移，可以得到覆盖全平面的平行四边形的网格（图1.3（a））。由

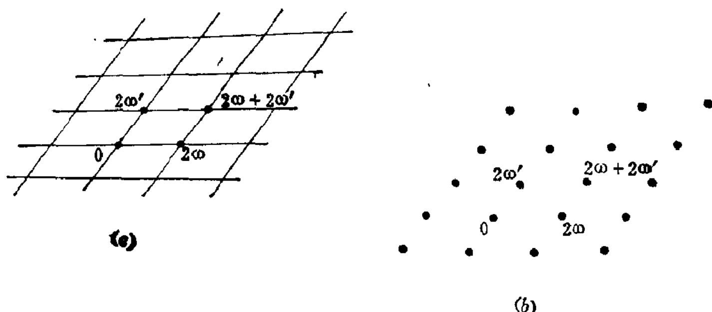


图1.3　双周期网格

(1.10) 式可见，在所有四边形的顶点上及四边形中任意相同点上函数值是相同的。故称该四边形为周期四边形。若任意去掉四边形的三个顶点及与其相连接的二个边，留下一个顶点及通过该点的二个边和四边形中全部点的集合，称之为**单位胞腔**。知道函数在单位胞腔上的分布情形，根据其周期性可知函数在全平面上的分布了。不同函数对应不同大小和形状的单位胞腔（或周期平行四边形）。应当指出，周期平行四边形的顶点一般可取为u_0，$u_0+2\omega$，$u_0+2\omega+2\omega'$，$u_0+2\omega'$，而u_0是平面上的任意点。

双周期函数的一个重要特性是在其单位胞腔上必有奇点，为此给出下述定理：

所有没有奇点的双周期函数皆是常数。

由于双周期函数在单位胞腔上没有奇点，其绝对值应恒小于某正数M，根据函数的周期性，可知在全平面上均如此。由刘维尔定理知该函数为常数。由此可见非常数的双周期函数一定有奇点。

§1.3 椭圆函数的定义和性质

仅以极点为其奇点的双周期函数(也叫双周期亚纯函数)称作椭圆函数。换句话说，**椭圆函数是具有双周期的有理型复变函数。**后面将要看到一般椭圆函数均可表示成有理型函数式。椭圆函数在其单位胞腔内所有极点之个数(m阶（重）极点算作m个极点)称作椭圆函数的**阶**。考虑到函数的周期性和单位胞腔的定义，若椭圆函数在其周期平行四边形的顶点或边线上出现一个极点，则在所有四边形的顶点或边线上均出现函数的极点，但极点只能算作一个。为了便于计算极点数，可以平移四边形的位置，使极点全在其内部。这样做的另一个好处是便于沿四边形的周界对椭圆函数进行积分。

椭圆函数的一般性质如下：

（1）**椭圆函数的导数仍为有同样周期的椭圆函数。**对(1.10)式求导n次后得

$$f^{n}(u+2m\omega+2m'\omega')=f^{n}(u)$$

若f是椭圆函数显然上式成立，且f^{n}亦是椭圆函数。

（2）**椭圆函数在其周期平行四边形内所有极点的留数之和等于零。**取任意u_0点为周期四边形的顶点，使函数的极点在四边形内部，函数沿四边形周界线的积分为

$$\int_{\square} f(u)du=\int_{u_0}^{u_0+2\omega} f(u)du+\int_{u_0+2\omega}^{u_0+2\omega+2\omega'} f(u)du$$

$$+\int_{u_0+2\omega+2\omega'}^{u_0+2\omega'} f(u)du+\int_{u_0+2\omega'}^{u_0} f(u)du$$

在第三项积分中令$u=v+2\omega'$，考虑到$f(v+2\omega')=f(v)$，故得

$$\int_{u_0+2\omega+2\omega'}^{u_0+2\omega'} f(u)=\int_{u_0+2\omega}^{u_0} f(v+2\omega')dv$$

$$=\int_{u_0+2\omega}^{u_0} f(v)dv$$

故第三项与第一项相消。同理可知第二与第四项相消，故

$$\int_{\square} f(u)du = 0$$

由留数定理知 $f(u)$ 在周期四边形内各留数之和等于零。

（3）**椭圆函数的阶数不少于二，即不存在一阶椭圆函数**。由性质（2）可以立即推导。因为若存在一阶椭圆函数，则在单位胞腔内的某 b_0 点上将仅有一个一阶极点，在该点处函数展开式的无限部分为 $B(u-b_0)^{-1}$，$B\neq 0$，即留数不等于零。这显然与性质（2）是矛盾的。即椭圆函数的阶数至少等于二。

二阶椭圆函数或者是只有一个二阶极点，其留数为零（即函数的无限部分仅有 $(u-b_0)^{-2}$ 项，而无 $(u-b_0)^{-1}$ 项），或者是只有二个一阶极点，其留数之和为零。前者称为卫尔斯特拉斯函数，后者称为雅各比函数。例如，式（1.7）所示的雅各比函数，其二个一阶极点分别是 $u=\mathrm{i}K'$ 和 $u=2K+\mathrm{i}K'$，留数分别是 $1/k$ 和 $-1/k$，留数之和为零。

（4）**椭圆函数在其单位胞腔内的零点数目等于极点的数目（等于函数的阶数）**。设 $f(u)$ 为椭圆函数，则 $\varphi(u)=f'(u)/f(u)$ 也是椭圆函数。可以证明 $\varphi(u)$ 在其周期平行四边形内的留数之和等于 $f(u)$ 的零点数减去极点数。应用性质（2）知该留数之和等于零，即 $f(u)$ 的零点数等于极点数。例如上述雅各比函数有二个一阶零点，分别是 $u=0$ 和 $u=2K$。

（5）**椭圆函数在单位胞腔中取任何数值（有限或无限）的次数相同**。在证明性质（4）的过程中，若将 $f(u)$ 换成 $f(u)-c$，即 $\varphi(u)=f'(u)/[f(u)-c]$，同理知该 $\varphi(u)$ 在周期四边形内的留数之和等于 $f(u)$ 的零点数与极点数之差。考虑到不论 c 取何值，$f(u)-c$ 与 $f(u)$ 有相同的极点。因此方程 $f(u)=c$ 在单位胞腔中根的数目等于 $f(u)-c$ 的极点的数目，亦即 $f(u)$ 的极点数目。这说明 $f(u)$ 在单位胞腔中取常数 c 的次数与取 ∞ 的次数相同

在上述证明过程中，可以用移动周期四边形的方法使方程 $f(u)=c$ 的根以及 $f(u)-c$ 的极点落在四边形的内部。由于 c

是任意选的复常数，可见函数在单位胞腔中取任何值的次数等于该函数的阶数。

（6）**椭圆函数在其单位胞腔内所有零点之和与所有极点之和的差值等于函数的一个周期。**设椭圆函数 $f(u)$ 为 n 阶，其零点为 a_k，极点为 b_k，则存在下列关系式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\square} u\frac{f'(u)}{f(u)}du=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

积分是沿周期四边形的周界上进行的，并设周界上无极点和零点。考察沿四边形二平行边的积分值

$$\int_{u_0}^{u_0+2\omega} u\frac{f'(u)}{f(u)}du+\int_{u_0+2\omega+2\omega'}^{u_0+2\omega'} u\frac{f'(u)}{f(u)}du$$

以 $u+2\omega'$ 代替第二个积分中的 u，则得

$$\int_{u_0}^{u_0+2\omega} u\frac{f'(u)}{f(u)}du+\int_{u_0+2\omega}^{u_0}(u+2\omega')\frac{f'(u+2\omega')}{f(u+2\omega')}du$$

$$=-\int_{u_0}^{u_0+2\omega}2\omega'\frac{f'(u)}{f(u)}du=-2\omega'[\ln f(u)]_{u_0}^{u_0+2\omega}$$

因为 $f(u_0)=f(u_0+2\omega)$，所以 $\ln f(u)$ 的改变等于 $\arg f(u)$ 的改变，其值为 $i2\pi$ 的整数倍。因此沿上述二平行边积分之和等于 $-2m'\omega'$。同理沿另二个平行边上积分值等于 $-2m\omega$，故得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=2m\omega+2m'\omega' \tag{1.11}$$

以上述的雅各比函数为例，若选二个极点为 $b_1=iK'$，$b_2=2K+iK'$，则单位胞腔上的零点有二种选择法：一种是 $a_1=0$，$a_2=2K$；另一种是 $a_1=i2K'$，$a_2=2K+i2K'$。由此得

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)=\pm i2K'$$

$2K'$ 正是 $\mathrm{sn}(u)$ 的一个周期。

（7）**若二个椭圆函数有相同的周期及在单位胞腔内有相同的极点和零点，且极点和零点的阶(重)数也相同，则二函数之比**

是一非零的常数。设$f_1(u)$和$f_2(u)$在单位胞腔内有相同的极点和零点，其极点和零点的阶数也相同，则二者比值$f_1(u)/f_2(u)$在单位胞腔内既无零点也无极点，故应等于非零的常数。

(8) **若二个椭圆函数有相同的周期，在单位胞腔内有相同的极点以及在极点的无限部分，则二函数之差为一常数。**设$f_1(u)$和$f_2(u)$在$u=u_0$点有相同的无限部分，故$f_1(u)-f_2(u)$在该点是解析的，即函数在单位胞腔内无极点，故应等于一个常数。

§1.4 椭圆函数的周期格阵

研究一下与椭圆函数的双周期性有密切联系的格阵的概念。复数的**格阵**Ω是复数的集合，它是一个加法群，并且其非零元素的绝对值是下有界的，即存在一个实数k，使Ω中所有非零的ω有$|\omega|>k$。一般格阵是由二个生成元ω，ω' ($\mathrm{Im}(\omega'/\omega)>0$) 的整数倍数的全体线性组合构成的，是二维的。由于历史原因，双周期函数的周期常表示为2ω，$2\omega'$，故如图1.3(b)所示，以2ω，$2\omega'$为周期点的全体形成二维格阵2Ω。格阵的生成元通常不是唯一的，若ω和ω'生成Ω，则

$$\omega_1=p\omega+q\omega',\quad \omega_1'=\gamma\omega+s\omega' \tag{1.11}$$

也生成Ω。这里p，q，r，s是任意整数，并满足$ps-qr=\pm 1$。为了使$\mathrm{Im}(\omega'/\omega)>0$，应取$ps-qr=1$。

对于任意的二维格阵，当保持一个生成元ω不变，而令ω'连续变化，使$\mathrm{Im}(\omega'/\omega)\to\infty$，则平面上除了留下通过原点的直线上间隔为$2\omega$的格点外，其余格点均移到无限远处。这种一维格阵称为简单格阵，它实际上是二维格阵的退化形式。

取Ω中ω的共轭复数$\bar{\omega}$的集合，形成$\bar{\Omega}$，$\bar{\Omega}$也是一个格阵。当$\bar{\Omega}=\Omega$时，Ω称为是实型的。对于二维格阵，$\bar{\Omega}=\Omega$发生在下列二种情况：(i) ω为实数，而ω'为纯虚数，即格点呈矩形分布，称Ω是矩形的。该矩形的边分别是水平和垂直的，即分别平行于实轴和虚轴。(ii) 选ω和ω'为一对共轭复数，则格点呈菱

形分布，称Ω是菱形的，其对角线分别是水平和垂直的。对于矩形和菱形格阵，将根据其较长边（较长的菱形对角线）在水平或垂直位置上，而分别将其称作是水平和垂直的。

除了上述的一般情况外，还有二种特殊形状的格阵：(i)正方形，它既可能是矩形也可能是菱形格阵的一种特殊的形式，正方形格阵满足关系式$\Omega = i\Omega$。(ii)等边三角形，二个具有公共边的等边三角形构成一个菱形，其对角线在水平和垂直位置上，二对角线的比为$\sqrt{3}:1$。对于这种格阵存在关系式$\Omega = \varepsilon\Omega$，$\varepsilon$是1的立方根。

作为一个例子，由图1.2可见，雅各比函数$\mathrm{sn}u$是一个双周期函数，其Ω是矩形的（其周期平行四边形为矩形）。因此Ω是实型的。

若Ω是由生成元ω_1，ω_2生成的一个加法群，则有限指数的子群称为**子格阵**，特别是由$2\omega_1$，$2\omega_2$生成的2Ω是一个子格阵，实际上它是Ω的四分之一格阵。当生成元分别是$(\omega_1, 2\omega_2)$，$(2\omega_1, \omega_2)$，$(\omega_1-\omega_2, \omega_1+\omega_2)$，所对应的格阵$\Omega_1$，$\Omega_2$，$\Omega_3$均是$\Omega$的半个格阵，如图1.4所示。不难看出，当$\Omega$是矩形的，且$\omega_2/\omega_1$是纯虚数时，$\Omega_1$和$\Omega_2$是矩形的，而$\Omega_3$是菱形的；如果$\omega_2/\omega_1$的模值为1，$\Omega$是菱形的和实型的，则$\Omega_1$和$\Omega_2$彼此互为共轭复数镜像，而$\Omega_3$是矩形的。对于方形格阵，其半格阵中有二个是矩形的，矩形的长边是短边的二倍，而第三个是方形的。对于三角形格阵，全体半格阵是矩形的，其长边是短边的$\sqrt{3}$倍。

现在研究对Ω格阵点的求和问题。

对于任一由生成元ω和ω'构成的格阵Ω，其一般元可以表示成$m\omega+m'\omega'$，m和m'为包括零的正或负整数，考察下列级数

$$S_n(\Omega) = \sum_{m,\ m'}{}' (m\omega+m'\omega')^{-n} \tag{1.12}$$

符号Σ上角加一撇表示$m=m'=0$的除外。我们要证明该级数当$n>2$时收敛。为此以坐标原点为中心，将格阵点按形同心平行四边形分组，编号为1的四边形共八个点，其坐标为$\pm\omega$，$\pm$

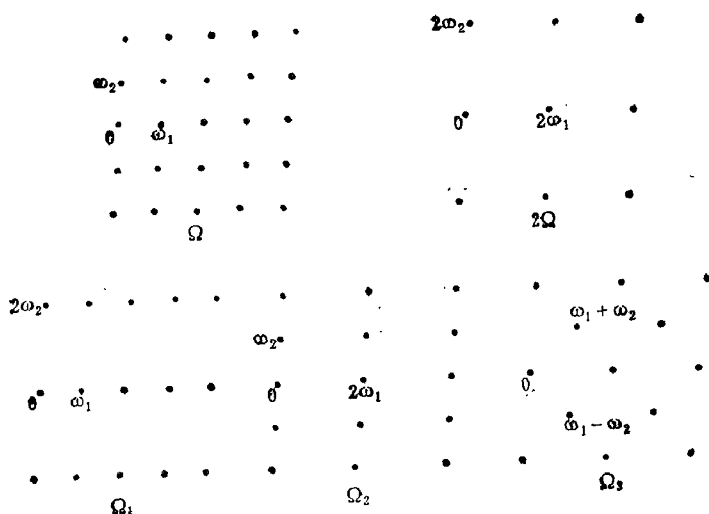


图1.4 子格阵

$(\omega+\omega')$, $\pm\omega'$, $\pm(\omega-\omega')$, 而编号为 r 的四边形共有 $8r$ 个点。用 $L_1(m, m')$ 表示编号 1 四边形上各个格阵点到坐标原点的距离，而用 l 表示由原点到该四边上的最小距离，则有

$$8l \leqslant \sum_1 L_1(m, m')$$

对于编号为 Y 的四边形，则有

$$8r(rl) \leqslant \sum_r L_r(m, m')$$

或

$$\sum_r |m\omega+m'\omega'|^{-n} < 8r(lr)^{-n}$$

$$\sum_{r=1}^{\infty}\sum_r |m\omega+n\omega'|^{-n} < 8l^{-n}\sum_{r=1}^{\infty} r^{-(n-1)}$$

上式右方级数在 $n>2$ 时收敛，即 (1.12) 式在 $n>2$ 为收敛

级数。

很易看到级数 $S_n(\Omega)$ 满足齐次性质，即对复数 $K \neq 0$，有 $S_n(K\Omega)=K^{-n}S(\Omega)$，$n>2$。如果 n 是奇数，则 $S_n(\Omega)=0$。因为 $\Omega=-\Omega$，故有

$$S_n(\Omega)=S_n(-\Omega)=-S_n(\Omega)$$

如果 Ω 是正方形的，因为 $\Omega=i\Omega$，所以对不能被 4 除的所有 n，$S_n(\Omega)=0$。如果 Ω 是三角形的，因为 $\Omega=\varepsilon\Omega$，所以对不能被 6 除的所有 n，$S_n(\Omega)=0$。如果 Ω 是实型的，则对所有的 n，$S_n(\Omega)$ 是实数，格阵的共轭复数元给出和式中的共轭复数项，实数元给出实数项，故一般有 $S_n(\bar{\Omega})=\overline{S_n(\Omega)}$。

第二章　二阶椭圆函数

§2.1　卫尔斯特拉斯函数$\mathscr{P}u$

§2.1.1　函数$\mathscr{P}u$的级数式

为了得到函数$\mathscr{P}u$，首先考察对格阵2Ω的下列级数

$$P(u)=P(u|2\Omega)=-2\sum_{m,\ m'}\frac{1}{(u-2m\omega-2m'\omega')^3} \tag{2.1}$$

符号Σ表示对全部m和m'求和。该级数在除去格阵点（$2m\omega+2m'\omega'$）的每一有限域内为绝对且均一致收敛，但在格阵点上变为无限大。故$P(u)$为有理型函数，$2m\omega+2m'\omega'$是其唯一的三阶极点。

很易证明$P(u)$为双周期函数，因为

$$P(u+2\omega)=-2\sum_{m,\ m'}\frac{1}{(u+2\omega-2m\omega-2m'\omega')^3}$$

$$=-2\sum_{l,\ m'}\frac{1}{(u-2l\omega-2m'\omega')^3}$$

式中$l=m-1$。由于（l，m'）与（m，m'）所取的组合是一样的，所以

$$P(u+2\omega)=P(u)$$

同理

$$P(u+2\omega')=P(u)$$

由椭圆函数的定义可知$P(u)$是三阶椭圆函数。该函数是一个奇函数，即$P(-u)=-P(u)$。

有了函数$P(u)$可以按下式得到卫尔斯特拉斯函数$\mathscr{P}u$

$$\wp' u = P(u) \tag{2.2}$$

或

$$\wp u = \frac{1}{u^2} + \int_0^u \left[P(u) + \frac{2}{u^3} \right] du$$

该积分除 $u=0$ 点外，不经过任一格阵点。将（2.1）代入上式逐项积分后得：

$$\wp u = \wp(u|2\Omega) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m,\ m'}{}' \left[\frac{1}{(u-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right] \tag{2.3}$$

$$w = 2m\omega + 2m'\omega'$$

$\wp u$是偶函数。其周期性不难由$P(u)$的周期性证得，因为

$$\wp'(u+2\omega) = \wp' u,\quad \wp'(u+2\omega') = \wp' u。$$

求积分得

$$\wp(u+2\omega) = \wp u + c,\quad \wp(u+2\omega') = \wp(u) + c'。$$

令 $u=-\omega$和$-\omega'$，考虑到$\wp u$为偶函数，得 $c=c'=0$，即函数的二个周期分别为 2ω和 $2\omega'$。

由（2.3）式知在格阵点（包括原点）上函数变为无限大，所以$\wp u$ 是一个具有二阶（重）极点的双周期函数，即$\wp u$ 是二阶椭圆函数。该函数是卫尔斯特拉斯理论的基础函数，也是椭圆函数论的一个基本函数。在椭圆函数论中对$\wp u$ 的分析研究具有特别重要的意义。

由（2.1）(2.3）式可见，对于任意常数λ有下列齐次关系式

$$\wp(\lambda u|2\lambda\Omega) = \lambda^{-2}\wp(u|2\Omega),\quad \wp'(\lambda u|2\lambda\Omega) = \lambda^{-3}\wp'(u|2\Omega)$$

二个特例是：当格阵为正方形时，有$i\Omega=\Omega$，故$\wp(iu) = -\wp u$，$\wp'(iu) = i\wp' u$；当格阵为三角形时，$\varepsilon\Omega=\Omega$，$\wp(\varepsilon u) = \varepsilon\wp u$，$\wp'(\varepsilon u) = \wp' u$。

可以在 $u=0$ 附近将函数$\wp u - u^{-2}$展为幂级数，其收敛半径为由原点到最接近的八个格阵点所构成的平行四边形边界上的最近距离。考虑下列二项式展开式

$$\frac{1}{(u-w)^2}=\frac{1}{w^2}\left(1-\frac{u}{w}\right)^{-2}$$

$$=\frac{1}{w^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{u}{w}\right)^n(n+1)$$

(2.3) 式的第二项为

$$\sum_{m,\ m'}{}'\left\{\frac{1}{(u-w)^2}-\frac{1}{w^2}\right\}$$

$$=\sum_{m,\ m'}{}'\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)}{w^2}\left(\frac{u}{w}\right)^n\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)S_{n+2}(2\Omega)u^n$$

式中

$$S_n(2\Omega)=\sum_{m,\ m'}{}'w^{-n},\quad w=2m\omega+2m'\omega' \tag{2.4}$$

考虑到 n 为奇数项等于零，仅留下 n 为偶数的项，从而得 $\wp u$ 的幂级数展开式

$$\wp u=\frac{1}{u^2}+\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)S_{2n+2}(2\Omega)u^{2n} \tag{2.5}$$

§2.1.2 函数$\wp u$的微分方程

在了解卫尔斯特拉斯函数的基本性质后，再研究其所满足的微分方程。根据 $\wp u$ 的微分方程我们将更清楚看到该函数可以由勒让德第一种椭圆积分的反演而得到。同时还可以得到与函数有密切联系的若干重要参量等。由（2.5）式得到

$$\wp u=\frac{1}{u^2}+3S_4u^2+5S_6u^4+7S_8u^6+9S_{10}u^8+\cdots\cdots \tag{2.5A}$$

$$\wp' u=-\frac{2}{u^3}+6S_4u+20S_6u^3+42S_8u^5+72S_{10}u^7+\cdots\cdots$$

$$\wp^3 u = \frac{1}{u^6} + 9S_4\frac{1}{u^2} + 15S_6 + (27S_4^2 + 21S_8)u^2$$

$$+ (120S_4S_6 + 27S_{10})u^4 + \cdots\cdots$$

$$\wp'^2 u = \frac{4}{u^6} - 24S_4\frac{1}{u^2} - 80S_6 + (36S_4^2 - 168S_8)u^2$$

$$+ (240S_4S_6 - 288S_{10})u^4 + \cdots\cdots$$

将上第三、四式约去u^{-6}项并代入第一式得

$$\wp'^2 u - 4\wp^3 u + 60S_4\wp u + 140S_6 = (108S_4^2 - 252S_8)u^2 + (660S_4S_6 - 396S_{10})u^4 + \cdots\cdots \quad (2.6)$$

等式左方是具有周期格阵2Ω的椭圆函数，除格阵点外是解析的。右方是左方函数在$u=0$附近的级数展开式。该级数在$u=0$上等于零，在其他格阵点上均无极点，由刘维尔定理知左方函数等于零。令

$$g_2 = 60S_4 = \sum_{m,\ m'} \frac{60}{w^4}$$

$$g_3 = 140S_6 = \sum_{m,\ m'} \frac{140}{w^6} \quad (2.7)$$

得到$\wp u$的微分方程

$$\left[\frac{d\wp u}{du}\right]^2 = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3$$

g_2，g_3称为函数$\wp u$的不变量。可见下列微分方程

$$\left[\frac{dz}{du}\right]^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3 \quad (2.8)$$

的解为$z=\wp(u+a)$，a是积分常数。由于当$u=0$时，$\wp u\to\infty$，故由（2.8）式得

$$u = \int_\infty^z \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}$$

这表明函数$\wp u$是由勒让德第一种椭圆积分的反演而得到。下面进一步讨论与函数微分方程有关的问题。

（1）首先研究u取何值时能使$\wp' u=0$。由（2.2）式知

$$\wp'(u+2\omega)=\wp' u,\quad \wp'(u+2\omega')=\wp' u,\quad \wp'(u+2\omega+2\omega')=\wp' u。$$

分别令$u=-\omega$，$-\omega'$，$-(\omega+\omega')$，同时考虑到$\wp'$是奇函数，故得

$$\wp'(\omega)=0,\quad \wp'(\omega')=0,\quad \wp'(\omega+\omega')=0$$

可见点ω，ω'和$\omega+\omega'$是$\wp' u$的三个简单零点。

（2）由函数的微分方程可以看到，$\wp' u=0$对应方程右方三次多项式的根，设根为e_1，e_2，e_3，则有

$$\wp(\omega)=e_1,\quad \wp(\omega')=e_2,\quad \wp(\omega+\omega')=e_3$$

由于在ω，ω'，$\omega+\omega'$点上函数的导数为零，故将这些点称为**平稳点**，而e_1，e_2，e_3称为$\wp u$的**平稳值**。知道这个关系对于分析函数在单位胞腔上的分布是很有意义的。可将三次多项式写成

$$4z^3-g_2z-g_3=(z-e_1)(z-e_2)(z-e_3) \tag{2.9}$$

比较系数得

$$\left.\begin{aligned}&e_1+e_2+e_3=0\\&e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3=-\frac{1}{4}g_2,\quad e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

这个多项式的判别式为

$$\Delta=16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2=g_2^3-27g_3^2 \tag{2.11}$$

e_1，e_2，e_3通常是不相等的。因为如果有二个相等，例如$e_1=e_2=e$，则二阶椭圆函数$\wp u-e$将具有二个二阶零点（ω，ω')，这是不可能的。所以对于通常的格阵2Ω，$\Delta\neq0$，$g_2^3\neq27g_3^2$

为方便起见常用下列符号

$$\omega_1=\omega,\quad \omega_2=\omega',\quad \omega_3=-\omega-\omega' \tag{2.12}$$

则

$$\begin{gathered}\omega_1+\omega_2+\omega_3=0\\ \wp\omega_i=e_i,\quad i=1,\ 2,\ 3\end{gathered} \tag{2.12A}$$

另一种选择是

$$\omega_1=\omega,\quad \omega_3=\omega',\quad \omega_2=-\omega-\omega' \tag{2.13}$$

$$\wp\omega_k=e_k,\quad k=1,\ 2,\ 3 \tag{2.13A}$$

这种选择的方便之处在于当e_k都是实数时，满足习惯上的次序 $e_1>e_2>e_3$。

易见按（2.12）或（2.13）式选择时，仅是 ω_2 与 ω_3 的位置上互换，这又导致 e_2 和 e_3 位置的互换。实际使用时，这二种选择均常见到，应记住这二种选择间的关系，以避免产生次序上的混淆。

（3）不变量 g_2，g_3 与格阵形状的关系。由第一章知，如果 Ω 是方形的，则除了 n 是 4 的倍数外，$S_n(\Omega)=0$，由（2.7)式得 $g_3=0$。因此三次多项式的常数项 $g_3=0$ 时，函数的格阵(因而周期平行四边形）呈正方形。若Ω呈三角形，则除了 n 是 6 的倍数外，$S_n(\Omega)=0$．由（2.7）得 $g_2=0$，故三角形格阵与 $g_2=0$ 相对应。但不存在$g_2=g_3=0$ 的情形，因为在此条件下微分方程化为$\left(\dfrac{dz}{du}\right)^2=4z^3$，其解为 $z=(u-c)^{-2}$，c 是积分常数，显然这不是椭圆函数了。

（4）用g_2，g_3表示$\wp u$幂级数式的系数。由于（2.6)式左方等于零，故右方级数的全部系数项均应等于零，从而得

$$7S_8=3S_4^2,\quad 3S_{10}=5S_4S_6,\quad \cdots\cdots$$

全部$S_{2n}(2\Omega)$ 均可用 $S_4(2\Omega)$ 和 $S_6(2\Omega)$ 的多项式来表示，也即是用 g_2 和 g_3 表示，因此（2.5）式变成

$$\wp u=\frac{1}{u^2}+\frac{g_2}{20}u^2+\frac{g_3}{28}u^4+\frac{g_2^2}{1200}u^6+\frac{g_2g_3}{560}u^8+\cdots\cdots \tag{2.14}$$

若给定 g_2，g_3，则该级数式被唯一地确定了。

§2.1.8 实型格阵卫尔斯特拉斯函数分布

现在研究实型格阵时函数$\wp u$ 在周期平行四边形上的分布情形。首先考察当 $u\to 0$ 时，$\wp u$ 的变化情形。上一章已指出，实

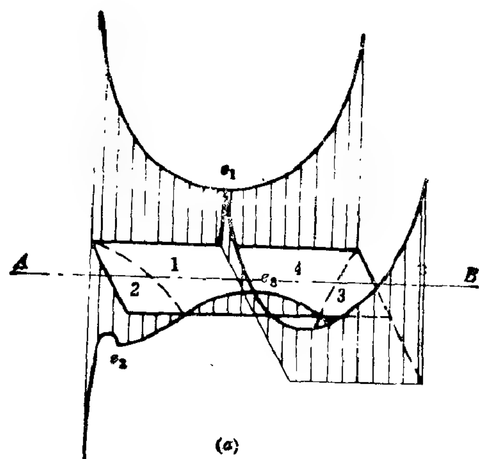
型格阵具有$\Omega=\bar{\Omega}$的属性，即分布在u平面上的格阵点构成无限个共轭复数对。故$S_n(2\Omega)$是实数，因此g_2，g_3全是实数，而函数的幂级数（2.14）式的所有系数也是实数。由级数式易见，当u值很小时，函数取决于$1/u^2$。因此当u是小正实数时，$\wp u$取大的正实数值；而当u是小的纯虚数值时，$\wp u$取大的负实数值。可见当u沿实轴或虚轴趋近于0时，$\wp u$取实数值并分别趋向于$+\infty$或$-\infty$值。

其次考虑$\wp u$为实函数的条件。若函数$\wp(u|2\Omega)$的u及w分别用其共轭复数替代时，将得到函数的共轭复数值，有$\wp(\bar{u}|2\bar{\Omega})=\overline{\wp(u|2\Omega)}$，这个性质类似函数的齐次性。对于实型格阵，不仅自变量为实数而且所有满足$u\pm\bar{u}=0$的点均能使函数值为实数，因为所有这些点上有$\overline{\wp u}=\wp u$。因此在u平面上，所有经过实数周期点和半周期点且与实数轴垂直的垂直线上，以及所有经过虚数周期点和半周期点且与虚轴相垂直的水平线上，函数$\wp u$均为实数。

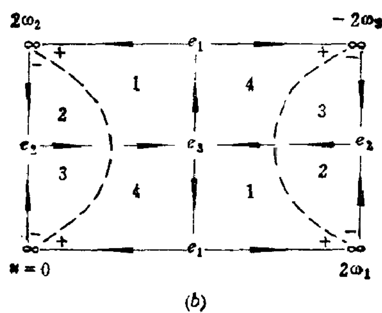
下面就不同格阵形状分别进行讨论。

（1）矩形格阵

选择ω_1为实数，ω_2为纯虚数时，则由周期及半周期点而构成的矩形周界上$\wp u$为实数。当u连续变化由$0\to\omega_1\to\omega_1+\omega_2(=-\omega_3)\to\omega_2$，再返回到0时，实数值$\wp u$连续下降由$+\infty\to-\infty$。其平稳值$e_1>e_3>e_2$。图2.1表示函数在周期平行四边形上的分布。其中图（a）表示沿四边形周界上的分布。图（b）上标出了在四边形顶点及若干特殊点上的函数值，实线为函数取实数值时u的轨迹，虚线表示函数为纯虚数时u的轨迹。$u=\frac{1}{2}\omega_1+\omega_2$为函数的零点，经过零点的实、虚线将平面分成四个区域1，2，3，4。每一个区域是同一象限上函数值的映象。若用θ表示函数的复角，则1，2，3，4象限所对应θ的范围分别是：$0<\theta<\frac{\pi}{2}$；$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$；$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$；$\frac{3\pi}{2}<\theta<$



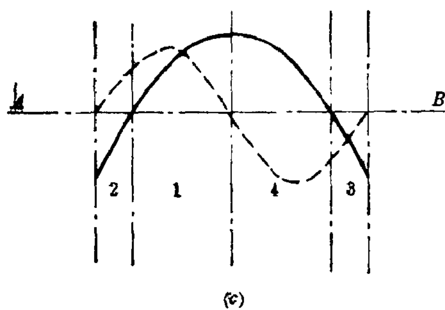
(a)



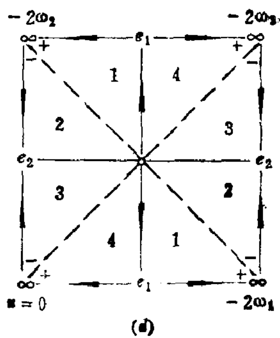
(b)

—— Re(℘(u))

– – – Im(℘(u))



(c)



(d)

图2.1 在周期四边形上 ℘u的分布

2π。图（c）表示沿图（a）四边形的AB线上函数实部和虚部的分布情形，图中还给出各象限的标号。在每个特定象限的任意点上，对应的函数值仅取值一次，但在周期四边形上有二个点取同一函数值，该二点对称分布在平稳点的两侧。在平稳点，函数值分别是e_1，e_2，e_3，该平稳值是二阶的。总之，在周期四边形上，任意函数值均取值二次，这是二阶椭圆函数的重要特性之一。

当$|\omega_1|=|\omega_2|$时，Ω是正方形的，不变量$g_3=0$。此时$\Omega=i\Omega$，$\omega_2=i\omega_1$，$\omega_3=i\omega_3$。利用函数的齐次性得$\mathscr{P}(i\omega_1)=-\mathscr{P}(\omega_1)$，$\mathscr{P}(i\omega_3)=-\mathscr{P}(\omega_3)$，也即是$e_2=-e_1$，$e_3=-e_3$，$e_3=0$。图2.1（$d$）表示在正方形周期四边形上函数的分布。函数为纯实数及纯虚数时u的轨迹相交于四边形的中心点，该平稳点（$u=\omega_1(1+i)$）所对应的平稳值$e_3=0$。该点是函数的二阶零点。

（2）菱形格阵

这种格阵的ω_1和ω_2为共轭复数，ω_3为正实数。u平面上$u=0$，$-2\omega_1$，$-2\omega_2$，$2\omega_3$四个点是菱形的顶点，如图2.2（a）所示。在经过所有格阵点的水平和垂直线上，函数值为实数。当u从$u=0$沿水平线变化到$u=\omega_3$点，$\mathscr{P}u$值在∞与e_3间振荡，然后u或是沿垂直线向上到$-2\omega_2$点，或是沿垂直线向下到$-2\omega_1$点，$\mathscr{P}u$由e_3下降到$-\infty$。平稳值e_3为实数，但e_1，e_2为共轭复数。图中还用虚线表示函数为纯虚数时u的轨迹。

菱形格阵的一个特例是格阵点是正方形的顶点，如图2.2（b），ω_3为实数，而$\omega_1=\frac{1}{2}(-1+i)\omega_3$，$\omega_2=\frac{1}{2}(-1-i)\omega_3$。与图2.1（$d$）相似，不变量$g_3=0$，且$e_3=0$。这二种方形格阵其一相对于另一个在空间旋转了45°，即二者差一个比例系数$i^{1/2}$，如果一个是Ω，则另一为$i^{1/2}\Omega$，并且有$\mathscr{P}(i^{1/2}u|2i^{1/2}\Omega)=-i\mathscr{P}(u|2\Omega)$。因此对于前者，在周期平行四边形的边界上以及经过半周期的水平和垂直线上，函数为实数，并在正方形的对角线上函数为纯虚数。而后者正好相反。就三次方程$4z^3-g_2z=0$的二个非零的根e_1，e_2来讲，前者为实数，而后者为共

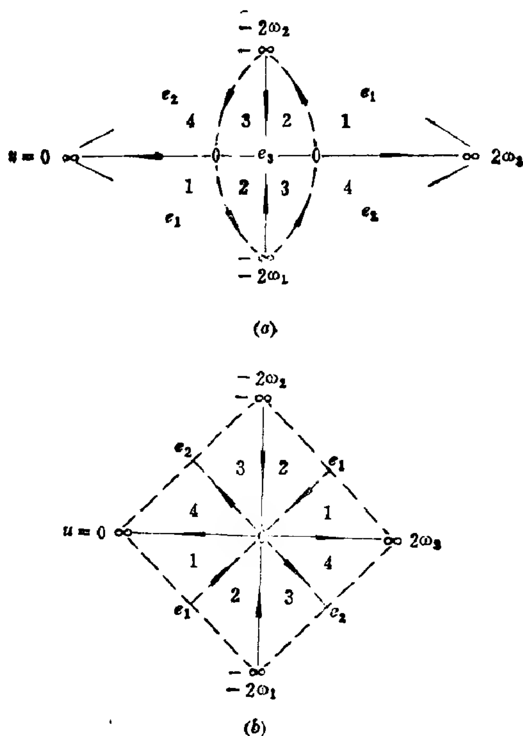


图2.2 菱形格阵

轭复数。另外前者的不变量g_2是正值，而后者是负值，这从齐次性上很容易看出，因为$g_2(i^{1/2}\Omega)=-g_2(\Omega)$。

（3）三角形格阵

构成三角形格阵的条件是$\omega_1:\omega_2:\omega_3=1:\varepsilon:\varepsilon^2$。如果令$\omega_3$是实数，而前二个为共轭复数，则得到垂直方向的三角形格阵（由二个具有公共边的三角形拼成的菱形，其较长的对角线位于垂直线的位置（图2.3(*a*))。如果ω_3是纯虚数，而ω_1，$-\omega_2$是共轭复数，则格阵是水平的（图2.3(*b*))。三角形格阵的$g_2=0$，方程$4z^3-g_3=0$的三个根满足条件$e_1:e_2:e_3=1:\varepsilon:\varepsilon^2$。令$\omega_4=\omega_1-\omega_2$，则三角形的中心在$\pm\frac{2}{3}\omega_4$上。函数$\wp u$的零点在二个三角形的中心处。图中实虚线的意义均同其他格阵。

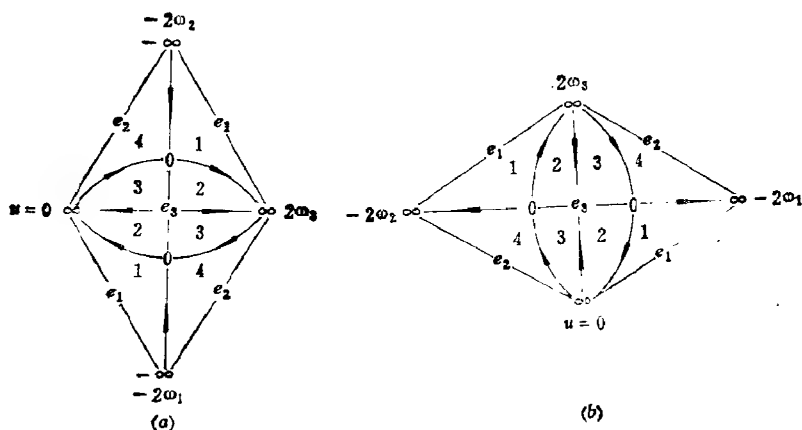


图2.3　三角形格阵

§2.2　任意二阶椭圆函数

首先考察具有不同零极点分布且周期格阵为 2Ω 的二阶椭圆函数，如何将其表示成函数$\mathscr{P}u$的函数式。

设函数 $f(u)$ 有一个二阶极点 u_m，并在 $u_m \pm u_k$ 上函数为0。不难看出函数$\mathscr{P}(u-u_m)-\mathscr{P}u_k$ 是与 $f(u)$ 有相同零点和有相同阶数极点的椭圆函数，因此二者之比是一个无极点的椭圆函数，故等于一个常数 A，从而得

$$f(u)=A[\mathscr{P}(u-u_m)-\mathscr{P}u_k] \tag{2.15}$$

设函数 $f(u)$ 有一个二阶零点u_0，而且$u_0 \pm u_h$是它的极点。显然函数$\mathscr{P}(u-u_0)-\mathscr{P}u_h$的极点是$u_0$，而零点是$u_0 \pm u_h$。故得

$$f(u)=\frac{A}{\mathscr{P}(u-u_0)-\mathscr{P}u_h} \tag{2.16}$$

设函数 $f(u)$ 有二个一阶极点u_1和 u_2，而 $u_0 \pm u_k$ 是其零点，令 $u_0=(u_1+u_2)/2$，$u_h=(u_1-u_2)/2$。研究下式

$$\frac{\mathscr{P}(u-u_0)-\mathscr{P}u_k}{\mathscr{P}(u-u_0)-\mathscr{P}u_h}$$

由于分子、分母的极点均为 u_0，故 u_0 不再是该函数式的极点。但

当 $u=u_0\pm u_h$ 时分母为零，而 $u=u_0\pm u_k$ 时分子为零，故 $u_0\pm u_h$ 为极点（即 u_1，u_2），而 $u_0\pm u_k$ 为其零点。因此 $f(u)$ 与该函数式之比为常数 A，即

$$f(u)=A\frac{\mathscr{P}(u-u_0)-\mathscr{P}u_k}{\mathscr{P}(u-u_0)-\mathscr{P}u_h} \tag{2.17}$$

一般 $f(u)$ 可表示为

$$f(u)=\frac{a\mathscr{P}(u-u_0)+b}{c\mathscr{P}(u-u_0)+d} \tag{2.18}$$

式中 u_0，a，b，c，d 是常数，且 $ad-bc\neq 0$。式（2.15）和（2.16）分别是 $c=0$ 和 $a=0$ 的特例。

将二阶椭圆函数表示成 $\mathscr{P}u$ 的上述分式是有实用意义的，例如在下一节研究雅各比函数时，即是将其平方函数表示成类似的分式，从而可以从已知的 $\mathscr{P}u$ 的特性推得雅各比函数的格阵及其在周期平行四边形上的分布等。这就自然地将这二种椭圆函数在相同阶数的前提下联系和统一起来，形成二阶椭圆函数簇的基本函数。

其次来研究二阶椭圆函数的二重值问题。从前面的分析已知，二阶椭圆函数在其单位胞腔上每个函数值取值二次，在某些特定点上，每个点对应函数的二重（阶）值。如果任意复数 c 是椭圆函数 $f(u)$ 的二重值，那么当 $c=\infty$ 时，意味着 $f(u)$ 具有二阶极点；而当 c 为有限值时，则表示 c 是 $f(u)$ 的平稳值。

已知 $\mathscr{P}(u-u_0)$ 有四个二重值：∞，e_1，e_2，e_3，分别对应 $u=u_0$ 和 $u=u_0+w_i$（$i=1$，2，3）。令 ϕ 是单应性 $x\to(ax+b)/(cx+d)$，因此 $f(u)=\phi\mathscr{P}(u-u_0)$；$f(u)$ 的四个二重值则分别是 $\phi\infty$，ϕe_i（$i=1$，2，3）。根据单应性下交比不变的原理，可见二阶函数 $f(u)$ 有四个二重值，其任意次序的交比满足下式

$$\frac{e_i-e_j}{e_i-e_k} \tag{2.19}$$

该式 i，j，k 是1，2，3的某种排列。

任意具有格阵 2Ω 的二阶椭圆函数，其四个二重值交比的平

方根被称作格阵 2Ω 的模数。通常按下式定义模数 k 和补模数 k'

$$k^2=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2},\quad k'^2=\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2},\ k^2+k'^2=1 \tag{2.20}$$

二重值交比（见（2.19）式）的可能值有六个，故有十二个平方根。即十二个可能的模值是：

$$\pm k,\ \pm k',\ \pm\frac{1}{k},\ \pm\frac{1}{k'},\ \pm\frac{ik}{k'},\ \pm\frac{ik'}{k}$$

模值仅决定于 ω_1，ω_2的选择，亦即是决定于格阵的形状。所有相似格阵具有相同的模，因为用 $m\Omega$ 替代Ω时，意味着只是用 $m^{-2}e_1$，$m^{-2}e_2$，$m^{-2}e_3$ 替代了 e_1，e_2，e_3 而已。

§2.3 雅各比函数

在讨论了卫尔斯特拉斯函数$\wp u$以及可以用$\wp u$表示二阶椭圆函数以后，再研究雅各比函数是比较容易的。函数$\wp u$的格阵有各种形状（矩形，方形，菱形，三角形），而雅各比函数的格阵一般是矩形的。在单位胞腔上前者有一个二阶极点，而后者有二个一阶极点。可以有多种途径来建立雅各比函数，其中较为简单和直观的方法如第一章所述，是通过勒让德标准椭圆积分的反演而得到的。另一种是直接研究$\wp u-e_i$($i=1$，2，3）的平方根函数而得到十二种雅各比-哥来舍尔函数。另外还可以通过西他函数（下一章）来建立。下面将分别研究雅各比函数的定义及其主要特性。

§2.3.1 雅各比-哥来舍尔函数

（1.6）和（1.7）式已给出函数 $\mathrm{sn}u$ 与勒让德第一种椭圆积分的关系

$$z=\mathrm{sn}u,\quad u=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{2.21}$$

雅各比曾引入变量φ，令

$$z=\sin\varphi$$

则积分为

$$u=\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{2.22}$$

这个积分的反函数称为 u 的幅角，记作

$$\varphi=\mathrm{am}u$$

因此有

$$z=\sin\varphi=\sin\mathrm{am}u=\mathrm{sn}u$$

雅各比称之为幅角的正弦。另外还定义下列二函数

$$\sqrt{1-z^2}=\cos\varphi=\cos\mathrm{am}u=\mathrm{cn}u$$

$$\sqrt{1-k^2z^2}=\Delta\varphi=\Delta\mathrm{am}u=\mathrm{dn}u$$

当 $z=0$ 时，$u=0$，$\varphi=0$，使得 $\mathrm{cn}u=1$，$\mathrm{dn}u=1$。三个函数满足下式

$$\mathrm{sn}^2u+\mathrm{cn}^2u=1,\quad \mathrm{dn}^2u+k^2\mathrm{sn}^2u=1 \tag{2.23}$$

可将（2.21）式中 u 展成级数，为此将被积函数在 $z=0$ 附近展开

$$\frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=1+\frac{1}{2}(1+k^2)z^2$$

$$+\frac{1}{8}(3+2k^2+3k^4)z^4+\cdots\cdots$$

代入（2.21）式得

$$u=z+\frac{1}{6}(1+k^2)z^3+\frac{1}{40}(3+2k^2+3k^4)z^5+\cdots\cdots$$

当 $|u|<1$ 及 $\frac{1}{|k|}$ 时皆成立。求其反级数得 $z=\mathrm{sn}u$ 在 $u=0$ 附近的展开式

$$\mathrm{sn}u=u-\frac{1}{3!}(1+k^2)u^3+\frac{1}{5!}(1+14k^2+k^4)u^5-\cdots\cdots \tag{2.24}$$

进一步得

$$\mathrm{cn}u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1}{4!}(1+4k^2)u^4$$
$$-\frac{1}{6!}(1+44k^2+16k^4)u^6+\cdots\cdots \tag{2.25}$$

$$\mathrm{dn}u = 1 - \frac{1}{2!}k^2u^2 + \frac{1}{4!}(4k^2+k^4)u^4$$
$$-\frac{1}{6!}(16k^2+44k^4+k^6)u^6+\cdots\cdots \tag{2.26}$$

哥来舍尔曾提出了用一种简便符号表示雅各比椭圆函数的倒数及除商

$$nq = \frac{1}{qn}, \quad pq = \frac{pn}{qn}$$

在倒数式中 q 是 s，c，d 中的任一个，在除商式中 pq 是 s，c，d 中的任意二个（包括次序的倒置）。因此有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ns}\,u = \frac{1}{\mathrm{sn}u}, \quad \mathrm{nc}\,u = \frac{1}{\mathrm{cn}u}, \quad \mathrm{nd}\,u = \frac{1}{\mathrm{dn}u}\\
&\mathrm{sc}\,u = \frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u}, \quad \mathrm{sd}u = \frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{dn}u}, \quad \mathrm{cd}u = \frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}\\
&\mathrm{cs}\,u = \frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{sn}u}, \quad \mathrm{ds}u = \frac{\mathrm{dn}u}{\mathrm{sn}\,u}, \quad \mathrm{dc}u = \frac{\mathrm{dn}u}{\mathrm{cn}u}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

在讨论雅各比函数的性质之前，先来研究函数$\mathrm{sn}u$与$\wp u$间的关系。仍由（2.21）积分式出发，令 $z^2 = t$，则（2.21）式变成

$$u = \int_0^t \frac{dt}{2\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}} \tag{2.28}$$

已知卫尔斯特拉斯标准椭圆积分

$$u' = \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$
$$= \int_\infty^x \frac{dx}{\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \tag{2.29}$$

上二积分式均含有三次多项式，其根 e_1，e_3，e_2 应与 $1, 1/k^2, \infty$ 相对应。为了看出 u 和 u' 间关系，设法将（2.29）变成（2.28）的形式。为此需将变量 x 变为变量 t。因为当 $x=\infty$ 时，t 必须等于 0，故变换取下式

$$t=\frac{A}{x-B}$$

为了保持根的对应性，可以设 $B=e_2$，$A=e_1-e_2$，则 $x=e_1$ 时，$t=1$，故得

$$t=\frac{e_1-e_2}{x-e_2}$$

进一步得

$$x-e_2=\frac{e_1-e_2}{t}$$

$$x-e_1=\frac{(e_1-e_2)(1-t)}{t}$$

$$x-e_3=\frac{(e_1-e_2)\left(1-\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}t\right)}{t}$$

$$dx=\frac{-(e_1-e_2)}{t^2}dt$$

代入（2.29）式得

$$u'=\frac{1}{\sqrt{e_1-e_2}}\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{t(1-t)\left(1-\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}t\right)}}$$

运用（2.20）式 $k^2=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2}$ 易见

$$u=\sqrt{e_1-e_2}\,u'$$

$$x=\wp\left(\frac{u}{\sqrt{e_1-e_2}}\right)$$

考虑到变换式 $t=z^2=\mathrm{sn}^2u$ 及 $t=\frac{e_1-e_2}{x-e_2}$，我们有

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{e_1 - e_2}{\wp\left(\frac{u}{\sqrt{e_1 - e_2}}\right) - e_2} \tag{2.30}$$

这个式子表示了二函数间的关系（对于格阵 2Ω，生成元 $2\omega_1$，$2\omega_2$）。为了简化二函数间的关系式，引入一个标度因子 h，并令 $h^2 = e_1 - e_2$。将格阵 2Ω 乘以标度因子 h 得到一个新格阵，生成元是 $2h\omega_1$，$2h\omega_2$。因为

$$e_i(2h\Omega) = \wp(h\omega_i) = h^{-2}\wp(\omega_i) = h^{-2}e_i(2\Omega)$$

故

$$e_1(2h\Omega) - e_2(2h\Omega) = h^{-2}[e_1(2\Omega) - e_2(2\Omega)] = 1$$

我们将满足 $h^2 = e_1 - e_2 = 1$ 的格阵 $2h\Omega$ 称为**规一化格阵**，并记作 $2\Omega_n$，即 $2\Omega_n = 2h\Omega$。显然 $2\Omega_n$ 与 2Ω 是相似的。对于规一化格阵 (2.20)，(2.30) 变成

$$e_3 - e_2 = k^2,\quad e_1 - e_3 = k'^2 \tag{2.31}$$

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{1}{\wp u - e_2};\quad \mathrm{ns}^2 u = \wp u - e_2 \tag{2.32}$$

利用 (2.23)，(2.31)，(2.32) 及 $e_1 - e_2 = 1$ 可以得到

$$\mathrm{cn}^2 u = \frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_2};\quad \mathrm{nc}^2 u = \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_1} \tag{2.33}$$

$$\mathrm{dn}^2 u = \frac{\wp u - e_3}{\wp u - e_2};\quad \mathrm{nd}^2 u = \frac{\wp u - e_2}{\wp u - e_3} \tag{2.34}$$

$$\mathrm{sc}^2 u = \frac{1}{\wp u - e_1};\quad \mathrm{cs}^2 u = \wp u - e_1 \tag{2.35}$$

$$\mathrm{sd}^2 u = \frac{1}{\wp u - e_3};\quad \mathrm{ds}^2 u = \wp u - e_3 \tag{2.36}$$

$$\mathrm{cd}^2 u = \frac{\wp u - e_1}{\wp u - e_3};\quad \mathrm{dc}^2 u = \frac{\wp u - e_3}{\wp u - e_1} \tag{2.37}$$

十二个雅各比-哥来舍尔函数的平方均表示成 $\wp u - e_i$（$i = 1, 2, 3$）的函数（包括倒数和除商），这些表示式正如§2.2中已讨论过的那种形式。

需要指出，在给定了格阵形状但没有规定生成元的条件下，

有六种不同的e_i-e_j可选作h^2。因此对于格阵2Ω，能够得到六种规一化的格阵。如果$2\Omega_n$是其中的一种，模数为k，则其余五种规一化格阵将是：$2i\Omega_n$，$2k\Omega_n$，$2ik\Omega_n$，$2k'\Omega_n$，$2ik'\Omega_n$，其模数分别是k'，$1/k'$，ik'/k，ik/k'，$1/k'$，这里$k^2+k'^2=1$。这六个格阵分成三对，每对中二个具有相同的大小，但其一相对于另一个旋转了90°。

§2.3.2 根函数

由（2.32）～（2.37）可知十二个雅各比-哥来舍尔函数是由$\wp u-e_i$（$i=1$，2，3）的平方根函数来表示的。为此首先考察该平方根函数的性质。

一般对于函数$f(u)$，若$u=a$点是一个n阶零点或$-n$阶极点，令$f(u)=(u-a)^n\phi(u)$，$\phi(u)$在a点是解析和非零的。沿围绕a点的小圆上进行延拓以观察$f(u)$平方根的变化。由于沿圆周一圈时$u-a$的幅角变化$2\pi i$，故$(u-a)^{\frac{n}{2}}$增加$n\pi i$。因此$(u-a)^{\frac{n}{2}}$的二个值（即是$f(u)$的二个平方根）当n为偶数时，返回到它的初始值；当n为奇数时，在返回到初始点时，其值发生变化。对于后者，称函数的平方根在$u=a$点产生分支。

$\wp u-ei$在全平面上周期性分布有二阶极点和零点（$n=2$），故它的平方根在全平面上没有分支。$\wp u-ei$的二阶极点和零点对应着其平方根的一阶极点和零点。在原点$\wp u-ei$的主部是u^{-2}（参看（2.5A）式），而二个平方根则是$\pm u^{-1}$。取主部为$+u^{-1}$的平方根，将其定义为**根函数**$f_i(u)$，从而得到三个根函数

$$f_i^2(u)=\wp u-e_i,\quad i=1,\ 2,\ 3 \tag{2.38}$$

函数$\wp u-ei$不仅是u的偶函数，而且也是$u-\omega_i$的偶函数，也是$u-\omega_j$（$j\neq i$）的偶函数。根函数$f_i(u)$是u的奇函数，也是$u-\omega_i$的奇函数，但它是$u-\omega_j$（$i\neq j$）的偶函数。利用

这些奇偶性，由

$$f_i(2\omega_i - u) = -f_i(u) = f_i(-u)$$

$$f_i(2\omega_j - u) = f_i(u) = -f_i(-u)$$

用 u 代替 $-u$ 得

$$f_i(u + 2\omega_i) = f_i(u)$$

$$f_i(u + 2\omega_j) = -f_i(u), \quad (j \neq i)$$

$$f_i(u + 4\omega_j) = -f(u + 2\omega_j) = f_i(u)$$

因此根函数 $f_i(u)$ 具有生成元 $2\omega_i$，$4\omega_j$ 的周期格阵 $2\Omega_i$（是 2Ω 的半格阵）。根函数在 $2\Omega_i$ 上是二阶椭圆函数，但在 2Ω 上它不是椭圆函数，其极点和零点的阶数仅是1。

将（2.38）式代入 $\mathscr{P}u$ 的微分方程，得

$$[\mathscr{P}'u]^2 = 4[\mathscr{P}u - e_1][\mathscr{P}u - e_2][\mathscr{P}u - e_3]$$

$$[2 f_i(u) f_i'(u)]^2 = 4 f_1^2(u) f_2^2(u) f_3^2(u)$$

或

$$f_i'(u) = -f_j(u) f_k(u) \tag{2.39}$$

式中 i，j，k 是1，2，3的任一种排列。上式右方取负号是因为 $f_i(u)$ 在原点的主部为 u^{-1}，而 $f_i'(u)$ 的主部是 $-u^{-2}$ 之故。

三个根函数满足三个二次方程式

$$f_i^2(u) - f_j^2(u) = e_j - e_i$$

其完整形式可表示成下列矩阵式

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & e_3 - e_2 \\ 1 & 0 & -1 & e_1 - e_3 \\ -1 & 1 & 0 & e_2 - e_1 \\ e_2 - e_3 & e_3 - e_1 & e_1 - e_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1^2(u) \\ f_2^2(u) \\ f_3^2(u) \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{2.40}$$

四个方程的任意三个是线性独立的。系数矩阵是斜对称的，它的普法夫多项式等于0。

§2.3.3 雅各比函数的性质

由式 (2.32)～(2.37) 和 (2.38)，并考虑到根函数的定义，从而将雅各比-哥来舍尔函数用三种根函数表示：

$$\mathrm{cs}\,u=f_1(u),\ \ \mathrm{ns}\,u=f_2(u),\ \ \mathrm{ds}\,u=f_3(u)$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{sc}\,u=\frac{1}{f_1(u)},\quad \mathrm{sn}\,u=\frac{1}{f_2(u)},\quad \mathrm{sd}\,u=\frac{1}{f_3(u)}\\
&\mathrm{cn}\,u=\frac{f_1(u)}{f_2(u)}\quad \mathrm{cd}\,u=\frac{f_1(u)}{f_3(u)}\quad \mathrm{dn}\,u=\frac{f_3(u)}{f_2(u)}\\
&\mathrm{nc}\,u=\frac{f_2(u)}{f_1(u)}\quad \mathrm{dc}\,u=\frac{f_3(u)}{f_1(u)}\quad \mathrm{nd}\,u=\frac{f_2(u)}{f_3(u)}
\end{aligned}\tag{2.41}$$

将 (2.31)，(2.38) 式代入 (2.40) 得

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & k^2 \\ 1 & 0 & -1 & k'^2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -k^2 & -k'^2 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{cs}^2 u \\ \mathrm{ns}^2 u \\ \mathrm{ds}^2 u \\ 1 \end{bmatrix}=0 \tag{2.42}$$

这些函数是在规一化格阵上建立的。通常选 ω_1 是实数，ω_2 是纯虚数，即 2Ω 是矩形的。此时 e_1，e_2，e_3 全是实数，满足$e_1>e_3>e_2$，并且 k^2 和k'^2 二者均在 0-1 之间。若 2Ω 是垂直的或水平的，则分别满足$k^2<\frac{1}{2}<k'^2$和 $k'^2<\frac{1}{2}<k^2$。通常用 $2K$，$2iK'$ 表示规一化格阵 $2\Omega_n$ 的生成元 $2h\omega_1$ 和 $2h\omega_2$，即

$$2K=2h\omega_1,\ \ 2iK'=2h\omega_2$$

式中K和 K'为正实数。

规一化格阵 $2\Omega_n$ 的半格阵有三个：$2\Omega_{n1}$，$2\Omega_{n2}$，$2\Omega_{n3}$，它们分别是上述某些函数的周期格阵，其生成元分别是$(2K,\ 4iK')$，$(4K,\ 2iK')$，$(2K-2iK',\ 2K+2iK')$。

函数极点和零点的分布取决于三个根函数的零极点的状况。原点 $u=0$ 是三个根函数的一阶极点，由 (2.41) 知原点是$\mathrm{cs}\,u$，$\mathrm{ns}\,u$，$\mathrm{ds}\,u$ 的极点，也是 $\mathrm{sc}\,u$，$\mathrm{sn}\,u$，$\mathrm{sd}\,u$ 的零点。$u=K$，iK'，

$K+iK'$分别是$f_1(u)$，$f_2(u)$ 和$f_3(u)$ 的零点，因此分别是 $\mathrm{cs}\,u$，$\mathrm{ns}\,u$，$\mathrm{ds}\,u$ 的零点，也分别 是 $\mathrm{cn}\,u$ 和 $\mathrm{cd}\,u$，$\mathrm{nc}\,u$ 和 $\mathrm{nd}u$，$\mathrm{dc}\,u$ 和 $\mathrm{dn}\,u$ 的零点；同时还分别是 $\mathrm{sc}\,u$，$\mathrm{sn}\,u$，$\mathrm{sd}\,u$ 的极点，也分别是 $\mathrm{nc}\,u$ 和 $\mathrm{dc}\,u$，$\mathrm{cn}\,u$ 和 $\mathrm{dn}\,u$，$\mathrm{cd}\,u$ 和 $\mathrm{nd}\,u$ 的极点。(2.41)式后面六个函数均是二个根函数的除商，在原点三个根函数的主部均是u^{-1}，故在原点这六个函数值为1。现将十二个函 数 的极点，零点以及其周期列表如下：

函数	极点	零点	周期
$\mathrm{cs}\,u$	0	K	$2K$，$4iK'$
$\mathrm{sc}\,u$	K	0	$2K$，$4iK'$
$\mathrm{ns}\,u$	0	iK'	$4K$，$2iK'$
$\mathrm{sn}\,u$	iK'	0	$4K$，$2iK'$
$\mathrm{ds}\,u$	0	$K+iK'$	$4K$，$2K+2iK'$
$\mathrm{sd}\,u$	$K+iK'$	0	$4K$，$2K+2iK'$
$\mathrm{cn}\,u$	iK'	K	$4K$，$2K+2iK'$
$\mathrm{nc}\,u$	K	iK'	$4K$，$2K+2iK'$
$\mathrm{dn}\,u$	iK'	$K+iK'$	$2K$，$4iK'$
$\mathrm{nd}\,u$	$K+iK'$	iK'	$2K$，$4iK'$
$\mathrm{cd}\,u$	$K+iK'$	K	$4K$，$2iK'$
$\mathrm{dc}\,u$	K	$K+iK'$	$4K$，$2iK'$

在Ω_n的每个格阵点ω上，这些函数或者是$u-\omega$的奇函数，或者是偶函数，这个奇偶性取决于ω的情况。如果$u=\omega$是函数的极点或零点，则函数是奇函数。对于其他格阵点ω，则函数是偶函数，这些点是平稳点，对应的函数值是平稳值。

由§2.2分析可见，$f_i(u)$ 的平稳值是e_j-e_i，e_k-e_i 的 平方根，所以 $\mathrm{cs}\,u$，$\mathrm{ns}\,u$，$\mathrm{ds}\,u$ 的平稳值分别是六个量± 1，$\pm k^2$，$\pm k'^2$中二个的平方根。这三个函数在原点的主部是u^{-1}，故对于小的正实数u，函数值为正实数，而对于小的虚数u，函数值为负的虚数。当u沿矩形由$u=0$出发到K，$K+iK'$，iK'，返回到0时，$\mathrm{cs}\,u$ 由∞到0，$-ik'$，-1 到$-\infty$；$\mathrm{ns}\,u$ 由∞到 1，k，0，到$-\infty$；$\mathrm{ds}\,u$ 由∞到k'，0，$-ik'$，到$-\infty$。这 些函

数在其余格阵点上的分布利用函数的周期性和奇偶性很易求得。至于其余九个函数，根据这三个函数的已知值，利用倒数或除商很易求出。图 2.4 给出六种函数在单位胞腔上的分布情况，标注了在格阵点（Ω_n 上）上的函数值。图中实线、虚线以及象限划分等均与图 2.2 、图 2.3 相似。其他六个函数分别是图示函数的倒数，不难由该图推得。

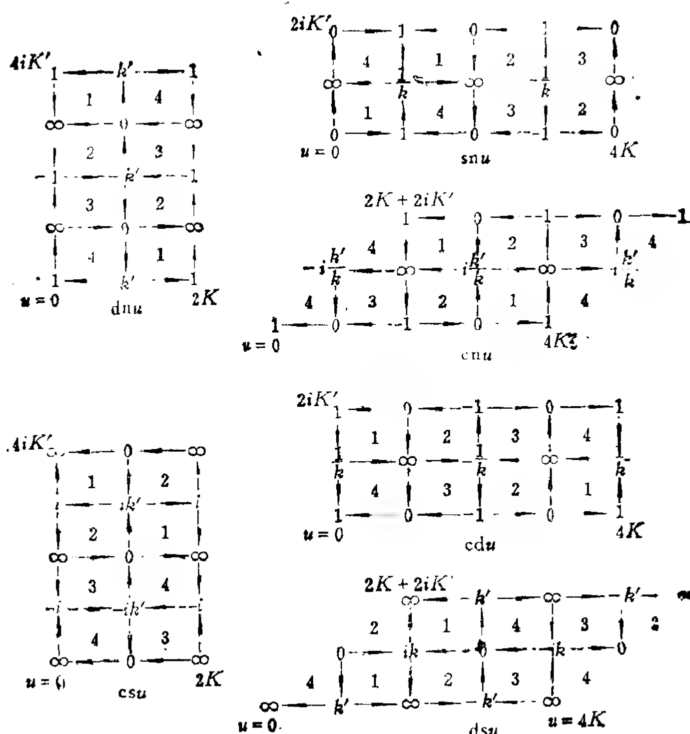


图2.4　雅各比函数分布

由 (2.39) 和 (2.41) 式可以求得函数cs u，ns u，ds u 的导数关系式，由此又可以导出其余函数的导数式，现列出如下：

$$\frac{d}{du}\operatorname{cs} u = -\operatorname{ns} u\cdot\operatorname{ds} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{sc} u = \operatorname{dc} u\cdot\operatorname{nc} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{ns} u = -\operatorname{cs} u\cdot\operatorname{ds} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u\cdot\operatorname{dn} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{ds} u = -\operatorname{cs} u\cdot\operatorname{ns} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{sd} u = \operatorname{nd} u\cdot\operatorname{cd} u$$

(2.43)

$$\frac{d}{du}\operatorname{cn} u = -\operatorname{dn} u\cdot\operatorname{sn} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{nc} u = \operatorname{sc} u\cdot\operatorname{dc} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{cd} u = -k'^2\cdot\operatorname{sd} u\cdot\operatorname{nd} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{dc} u = k'^2\cdot\operatorname{nc} u\cdot\operatorname{sc} u$$

$$\frac{d}{du}\operatorname{dn} u = -k^2\cdot\operatorname{sn} u\cdot\operatorname{cn} u \qquad \frac{d}{du}\operatorname{nd} u = k^2\cdot\operatorname{cd} u\cdot\operatorname{sd} u$$

每个函数的导数均比例于具有相同极点的二个函数的乘积，而后二函数的零点是该函数的平稳点。在二函数的一阶极点处得到乘积函数的二阶极点。

(2.43) 式可以用其他方法得到。例如，先对 (2.21) 式求微分得 $\frac{dz}{du}=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$，再利用函数定义及(2.23)式，即得到 $\frac{d}{du}\operatorname{sn} u$ 的关系式。对 (2.23) 式直接求微分，经过简单运算，又可得到 $\frac{d}{du}\operatorname{cn} u$，$\frac{d}{du}\operatorname{dn} u$ 的式子。进一步可以得到其余的式子。

§2.3.4 全椭圆积分

勒让德第一种椭圆积分 (2.21) 中，当积分限 $z=0-1$时，即得到全椭圆积分

$$K=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{2.44}$$

当积分限 $z=0—1/k$ 时

$$\int_0^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$+i\int_1^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}=K+iK' \tag{2.45}$$

对第二个积分作变换 $z=\frac{1}{\sqrt{1-k'^2z'^2}}$，得

$$\int_1^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-k^2z^2)}}$$

$$=\int_0^1\frac{dz'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-k'^2z'^2)}}$$

即
$$K'=\int_0^1\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}} \tag{2.46}$$

K'亦是椭圆积分，其模数是k'，而$k^2+k'^2=1$。当积分限 $z=0—\infty$时，积分路线绕过 $z=1$和 $z=1/k$ 二点时均在上半平面，得

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=K+iK'$$

$$-\int_{1/k}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}}$$

在第三项积分中作变换 $kz=1/t$，得

$$\int_{1/k}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(k^2z^2-1)}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}=K$$

所以

$$\int_0^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=iK' \tag{2.47}$$

以上各式将勒让德椭圆积分在不同积分限时的值，表示成全椭圆积分K和K'的形式。由椭圆积分的反演得

$$\mathrm{sn}K = 1,\quad \mathrm{cn}K = 0,\quad \mathrm{dn}K = k'$$

$$\mathrm{sn}(K+iK') = \frac{1}{k},\quad \mathrm{cn}(K+iK') = -\frac{ik'}{k},$$

$$\mathrm{dn}(K+iK') = 0$$

$$\mathrm{sn}(iK') = \infty,\quad \mathrm{cn}(iK') = \infty,\quad \mathrm{dn}(iK') = \infty$$

这与上一节所得到的结果完全一致。因此从几何意义上讲，全椭圆积分是雅各比-哥来舍尔函数的规一化格阵 Ω_n 的生成元，模数 k 和补模数 k' 或二者的比值，则是该型函数的平稳值。

全椭圆积分可以展成模数 k (k') 的幂级数。为此，先对 $(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2}$ 按二项式定律展开

$$(1-k^2\sin^2\varphi)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\sin^4\varphi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\sin^6\varphi + \cdots$$

代入 (2.44) 式，再运用下式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi d\varphi = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2}\varphi d\varphi = \cdots\cdots$$

$$= \frac{(2n-1)}{(2n)}\,\frac{(2n-3)}{(2n-2)}\cdots\frac{3}{4}\,\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

由 (2.44) 式得 K 的级数式

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2 k^8 + \cdots\cdots\right\} \tag{2.48}$$

当 $|k|<1$ 时，这个级数绝对和均一收敛。K' 和 k' 间有类似的式子。

§2.4 二阶椭圆函数的蜕变

椭圆函数的重要特性是它具有双周期性，当其周期趋于极限值无限大时，则椭圆函数要蜕变为非椭圆函数。

首先考察函数 $\wp(u)$。若令 ω 保持为有限值，而 ω' 趋于无

限大时，此时$\mathscr{P}(u)$变为

$$\mathscr{P}u=-\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2+\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^2\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi u}{2\omega}\right)} \tag{2.49}$$

$$e_1=\frac{3g_3}{g_2},\quad e_2=e_3=-\frac{3g_3}{2g_2}$$

由（2.20）式得，此时模数$k=0$

如令ω也趋于无限大，则从$\mathscr{P}u$的级数式立即得

$$\mathscr{P}u=\frac{1}{u^2} \tag{2.50}$$

此时$e_1=e_2=e_3=0$，故模数$k=1$。

现在来研究当$k=0$，$k=1$时，雅各比函数的蜕变情况。由勒让德椭圆积分

$$u=\int_0^z\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

知$z=\mathrm{sn}(u,\ k)$，由此得

$$\mathrm{sn}(u,\ 0)=\sin u,\ \mathrm{cn}(u,\ 0)=\cos u,\ \mathrm{dn}(u,\ 0)=1 \tag{2.51}$$

再设

$$\xi=\lim_{k\to1}\mathrm{sn}(u,\ k)$$

则

$$u=\int_0^\xi\frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\xi}{1-\xi}$$

$$e^{2u}=\frac{1+\xi}{1-\xi},\quad \xi=\frac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}=\mathrm{th}\,u$$

因此得

$$\mathrm{sn}(u,\ 1)=\mathrm{th}\,u,\ \mathrm{cn}(u,\ 1)=\mathrm{dn}(u,\ 1)=\mathrm{sech}\,u \tag{2.52}$$

第三章　拟椭圆函数

本章所讨论的函数从严格的定义上看均不属于椭圆函数，但它们均与椭圆函数或椭圆积分有密切的联系，是椭圆函数论的重要组成部分。它们中有的是由椭圆函数求积分而得到的（如$\zeta(u)$）；有的与标准椭圆积分相关联（如$E(u)$）；有的与其他拟椭圆函数存在简单的关系（如$\sigma(u)$）[●]。西他函数在椭圆函数的发展进程中起着重要的作用，许多函数（特别是雅各比函数）可以用它来定义。由于该函数的级数式具有收敛快的特点，在椭圆函数和椭圆积分计算中具有特别重要的意义。但从严格的定义上讲，西他函数亦不属于椭圆函数，故将其收编于本章。

§3.1　泽塔(Zeta)函数ζu

函数ζu与$\wp u$间存在下述关系

$$\zeta' u = -\wp u = \frac{-1}{u^2} + \sum_{\Omega}\left[\frac{-1}{(u-w)^2} + \frac{1}{w^2}\right] \tag{3.1}$$

也可写成

$$\zeta u = \frac{1}{u} - \int_0^u \left[\wp u - \frac{1}{u^2}\right] du \tag{3.2}$$

将$\wp u$的级数式代入该式，逐项积分后得

$$\zeta u = \frac{1}{u} + \sum_{\Omega}{}'\left[\frac{1}{u-w} + \frac{1}{w} + \frac{u}{w^2}\right] = \zeta(u|2\Omega) \tag{3.3}$$

可见点$w=2m\omega+2m'\omega'$是ζu的一阶极点。由于

● 在有的书籍中，引入第二种和第三种椭圆函数的概念，而函数σ属于第三种椭圆函数。参见沈璿：椭圆函数概论，1982，P.101—109

$$\zeta(-u)=\frac{-1}{u}-\int_0^{-u}\left[\wp u-\frac{1}{u^2}\right]du$$

$$=\frac{-1}{u}+\int_0^{u}\left[\wp u-\frac{1}{u^2}\right]du=-\zeta(u)$$

因此ζu是奇函数。

将$\wp u$的展发式（2.5A）和（2.14）代入（3.2）式求积分，得到ζu在原点附近的展开式：

$$\zeta u=\frac{1}{u}-S_4u^3-S_6u^5-S_8u^7-\cdots-S_{2n}u^{2n-1}\cdots \tag{3.4}$$

$$\zeta u=\frac{1}{u}-\frac{g_2}{60}u^3-\frac{g_3}{140}u^5-\frac{g_2^2}{8400}u^7-\frac{g_2g_3}{18480}u^9-\cdots \tag{3.4A}$$

函数ζu也具有下述齐次性：

$$\zeta(Mu|2M\Omega)=M^{-1}\zeta(u|2\Omega) \tag{3.5}$$

在$2\omega_1$，$2\omega_2$为边构成的单位胞腔上只有一个一阶极点，所以ζu不是椭圆函数。

由于存在下式

$$\frac{d}{du}[\zeta(u+2\omega)-\zeta(u)]=-\wp(u+2\omega)+\wp u=0$$

故在Ω中对任意ω和ω'，我们有

$$\zeta(u+2\omega)-\zeta(u)=2\eta \tag{3.6}$$

$$\zeta(u+2\omega')-\zeta(u)=2\eta'$$

式中η，η'是常数。上式分别令$u=-\omega$，ω'，并考虑到ζu是奇函数得

$$\zeta(\omega)=\eta \qquad \zeta(\omega')=\eta' \tag{3.7}$$

由（3.5）式得

$$\zeta(u+2\omega+2\omega')-\zeta u=2\eta+2\eta'$$

常数η和η'分别对应格阵Ω中的生成元ω和ω'，故可以将η和η'看成是另一个格阵ψ的生成元，二者间存在对应关系。在此关系下，$m\eta+m'\eta'$对应$m\omega+m'\omega'$，m和m'为整数。此外，二个格阵生成元间满足下列关系式

$$\eta\omega' - \eta'\omega = \frac{1}{2}\pi i \tag{3.8}$$

为了证明该式，在以u_0，$u_0+2\omega$，$u_0+2\omega+2\omega'$，$u_0+2\omega'$为顶点的周期平行四边形上，沿周界对ζu积分

$$\int_{\square}\zeta u du = \int_{u_0}^{u_0+2\omega}[\zeta u - \zeta(u+2\omega')]du$$

$$+\int_{u_0}^{u_0+2\omega'}[\zeta(u+2\omega)-\zeta u]du$$

$$=\int_{u_0}^{u_0+2\omega}(-2\eta')du + \int_{u_0}^{u_0+2\omega'}(2\eta)du$$

$$=-4\omega\eta' + 4\omega'\eta$$

在上述四边形中，函数仅有一个一阶极点，由（3.3）式知它的留数等于1，即

$$\int_{\square}\zeta u du = 2\pi i$$

可见（3.8）式成立。一般类似（3.7）式有

$$\zeta(\omega_i) = \eta_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{3.9}$$

$$\eta_1 = \eta,\ \eta_2 = \eta',\ \eta_3 = -\eta - \eta'$$

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

可将（3.8）式推广，得

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \eta_2\omega_3 - \omega_2\eta_3 = \eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3 = \frac{1}{2}\pi i \tag{3.10}$$

（3.10）式被称作勒让德-卫尔斯特拉斯关系式。下面分析生成元改变时的情形。若格阵Ω的生成元是

$$\omega_1' = d\omega_1 + c\omega_2,\quad \omega_2' = b\omega_1 + a\omega_2$$

与这相对应的格阵ψ的生成元为

$$\eta_1' = d\eta_1 + c\eta_2,\quad \eta_2' = b\eta_1 + a\eta_2$$

并有

$$\begin{bmatrix}\omega_2' & \eta_2' \\ \omega_1' & \eta_1'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_2 & \eta_2 \\ \omega_1 & \eta_1\end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\eta_1'\omega_2'-\eta_2'\omega_1'=(ad-bc)(\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1)$$

根据§1.2中指出的格阵与生成元间关系知 $ad-bc=1$。可是勒让德-卫尔斯特拉斯关系式与生成元的选择是无关的。

以上所研究的函数 ζu 不具有周期性，既无周期 $2\omega_1$，又无周期 $2\omega_2$，但我们可以用如下方法定义具有一个周期的函数。首先我们定义函数

$$\zeta_c u=\zeta u+Cu$$

满足关系式

$$\zeta_c' u=-\wp u+C,\quad \lim_{u\to 0}\left(\zeta_c u-\frac{1}{u}\right)=0$$

$$\zeta_c(-u)=-\zeta_c u$$

对于任意整数 m，n

$$\zeta_c(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\zeta_c u+2m(\eta_1+C\omega_1)+2n(\eta_2+C\omega_2)$$

$$\zeta_c(m\omega_1+n\omega_2)=m(\eta_1+C\omega_1)+n(\eta_2+C\omega_2)$$

（m 和 n 为非偶数时）

其次，令 $C=-\eta_1/\omega_1$，定义

$$\zeta^* u=\zeta u-\eta_1 u/\omega_1 \tag{3.11}$$

这是 u 的奇函数，满足下式

$$\zeta^*(u+2m\omega_1+2n\omega_2)=\zeta^* u-n\pi i/\omega_1$$

$$\zeta^*(m\omega_1+n\omega_2)=-n\pi i/2\omega_1$$

（m 和 n 为非偶数）

当 $n=0$ 时，$\zeta^*(u+2m\omega_1)=\zeta^* u$，可见函数 $\zeta^* u$ 具有周期 $2\omega_1$。

§3.2 西格玛(Sigma)函数 σu

首先考察函数 ζu 的积分。在 u 平面上，积分 $\int \zeta u du$ 不是唯一地由积分路径端点决定的。因为 ζu 在 u 平面的每个格阵点上其留数为 1，若任意闭合路径的域中包含有 r 个格阵点，则沿该闭合路径的积分值为 $2\pi ri$。而一个复数的对数也具有这样的特

性。由此得到启示，当积分下限固定时，$\int \zeta u du$不是积分上限的单值函数。可将其定义为一个函数的对数，该函数即 σu，写作

$$\ln \sigma u = \int_0^u \zeta u du \tag{3.12}$$

或

$$\zeta u = \frac{\sigma' u}{\sigma u}$$

将（3.3）式代入逐项积分，除了 $1/u$ 项外，对求和的每一项引入一个积分常数，$-\ln(-w)$，这等价于取 0 为积分的下限，由此得

$$\int \zeta u du = \ln u + \sum_{\Omega}{}' \left[\ln\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} \right] \tag{3.13}$$

为了判断该级数的收敛性，在 u 平面上取域 R，使 $|u| < Q$，以及 Ω 中的全体 w 有 $|u - w| > q$，Q 和 q 是选择的大数和小数。对于所有 w（仅是 Ω 的有限数目的元）使 $|\omega| > Q$，则可将 $\ln(1 - u/w)$ 用级数表示，得

$$\ln\left(1 - \frac{u}{w}\right) + \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{u}{w}\right)^n$$

$$+ \frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2} = \frac{-u^3}{w^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+3}\right)\left(\frac{u}{w}\right)^8 < 2|w|^{-3} Q^3$$

这表明（3.13）式级数项的绝对值随着 w 的增加而迅速的下降，因此该级数在 R 域内是绝对而均一收敛的。同时考虑(3.12)式和(3.13)式可以得到 σu 的定义式

$$\sigma u = u \prod{}' \left\{ \left(1 - \frac{u}{w}\right) \exp\left(\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}\right) \right\} \tag{3.14}$$

式中 Π' 表示在 Ω 中对 $w \neq 0$ 的所有 w 求积。这个无穷乘积的收敛性与无穷级数（3.13）式的收敛性是一致的。由（3.14）式可以看出 σu 在全 u 平面上是解析的，包括格阵点 w。这里格阵点

$u=w$不是函数的极点而是函数仅有的零点。因此σu不是椭圆函数而是整函数。当$u=0$时，(3.14) 式中除了u本身外所有因子均等于1，因此有

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sigma u}{u}=1 \tag{3.15}$$

σu是一个奇函数，因为用$-u$代替u时，只改变了 (3.14) 式中每对元素$\pm w$的因子，而每对因子的乘积并未改变，总的乘积也未变。但留下的因子u却改变了符号。

σu的齐次关系式是

$$\sigma(Mu|2M\Omega)=M^{-1}\sigma(u|2\Omega) \tag{3.16}$$

很易得到σu的级数式。因为σu是整函数，又是奇函数，故可令

$$\sigma u=c_1u+c_3u^3+c_5u^5+\cdots\cdots$$

代入 (3.12) 式$\zeta u=\sigma' u/\sigma u$，并运用 (3.4) 式和$S_n$与$g_2$，$g_3$间的关系式得

$$\sigma u=u-\frac{g_2}{2^4\cdot 3\cdot 5}u^5-\frac{g_3}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}u^7-\frac{g_2^2}{2^9\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7}u^9$$
$$-\frac{g_2g_3}{2^7\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 11}-\cdots\cdots \tag{3.17}$$

由 (3.12) 式和 (3.6) 式得

$$\frac{d}{du}\ln\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u}=\zeta(u+2\omega)-\zeta u=2\eta$$

求积分得

$$\ln\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma u}=2\eta u+\ln M$$

或

$$\sigma(u+2\omega)=Me^{2\eta u}\sigma u$$

M为积分常数。令$u=-\omega$，考虑到σu是奇函数得

$$\sigma(\omega)=-M\sigma(\omega)e^{-2\eta\omega}$$

$$M=-e^{2\eta\omega}$$

从而得

$$\left.\begin{aligned}\sigma(u+2\omega)&=-e^{2\eta(u+\omega)}\sigma(u)\\ \text{同理}\qquad \sigma(u+2\omega')&=-e^{2\eta'(u+\omega')}\sigma(u)\end{aligned}\right\}\qquad(3.18)$$

如将（3.18）式第二式的 u 换成 $u+2\omega$，并利用第一式得

$$\sigma(u+2\omega+2\omega')=e^{2\eta'(u+2\omega+2\omega')+2\eta(u+\omega)}\sigma(u)$$

利用（3.7）式得

$$\sigma(u+2\omega+2\omega')=-e^{2(\eta+\eta')(u+\omega+\omega')}\sigma(u)\qquad(3.19)$$

我们定义下列三个辅助西格玛函数

$$\sigma_k u=e^{-\eta_k u}\frac{\sigma(u+\omega_k)}{\sigma(\omega_k)}=-e^{\eta_k u}\frac{\sigma(u-\omega_k)}{\sigma(\omega_k)}\qquad(3.20)$$

$$k=1,\ 2,\ 3$$

上式的等号左右二种表示式是等价的，这是因为

$$\frac{\sigma(u+\omega_k)}{\sigma(u-\omega_k)}=-e^{2\eta_k u}$$

由于将 u 改变成 $-u$ 时，造成由一个表示式改变成另一个，可见 $\sigma_k u$ 是偶函数。而 $\sigma_k(0)=1$，并且 $u=\omega_k$，$w+\omega_k$ 是函数的零点。容易证明

$$\sigma_k(u+2\omega_k)=-e^{2\eta_k(u+\omega_k)}\sigma_k u\qquad(3.21)$$

$$\sigma_k(u+2\omega_j)=e^{2\eta_j(u+\omega_j)}\sigma_k u\quad(j\neq k)\qquad(3.22)$$

类似函数 ζu，可以由 σu 得到具有周期的函数。首先定义函数

$$\sigma_c u=e^{1/2cu^2}\sigma u$$

该函数显然满足

$$\frac{d}{du}\ln\sigma_c u=\zeta_c u$$

当 $C_1=-\eta_1/\omega_1$ 时，定义

$$\sigma^* u=e^{-1/2\eta_1 u^2/\omega_1}\sigma u\qquad(3.23)$$

满足

$$\frac{d}{du}\ln\sigma^* u=\zeta^* u,\quad \lim_{u\to 0}\frac{\sigma^* u}{u}=1$$

$$\sigma^*(-u)=-\sigma^*u \tag{3.24}$$

函数 σ^*u 在整个 u 平面上是解析的，且与 σu 有相同的零点。若 $\omega=m\omega_1+n\omega_2$，$\eta=m\eta_1+n\eta_2$，则

$$\begin{aligned}\sigma^*(u+2m\omega_1+2n\omega_2)&=(-1)^{mn+m+n}e^{-n\pi i(u+m\omega_1+n\omega_2)/\omega_1}\sigma^*u\\&=(-1)^{m+n}e^{-n\pi i(u+n\omega_2)/\omega_1}\sigma^*u\end{aligned} \tag{3.25}$$

可见当 $n=0$ 时，$4\omega_1$ 是 σ^*u 的一个周期。对于 $\sigma_k u$，用相似的过程得

$$\sigma_k^*(u+2\omega_1+2\omega_2)=c_k e^{-n\pi i(u+n\omega_2)/\omega_1}\sigma_k^*u \tag{3.26}$$

式中 σ^* 与 c 对应，而其余 σ_k^* 对应 c_k，$k=1$，2，3。c，c_1，c_2，c_3 分别等于 $(-1)^{m+n}$，$(-1)^m$，$(-1)^n$，1。

§3.3 雅各比拟椭圆函数 Eu

由勒让德第二种椭圆积分可以引入雅各比伪椭圆函数 Fu。在第一章中，在求椭圆弧长时曾得到勒让德第二种椭圆积分

$$\begin{aligned}S&=\int\frac{(1-k^2z^2)}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}dz=\int\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz\\&=\int\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi\end{aligned} \tag{3.27}$$

令

$$z=\mathrm{sn}(u,k),\quad 1-k^2z^2=\mathrm{dn}^2(u,k)$$

$$dz=\mathrm{cn}(u,k)\mathrm{dn}(u,k)du=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}\,du$$

代入 (3.27) 式得

$$S=\int \mathrm{dn}^2u\,du \tag{3.28}$$

由图 2.4 可以看出 $\mathrm{dn}^2u=-\mathrm{cs}^2(u+iK')$，同时考虑到 (2.38) 式及 (2.41) 式中 $f_1(u)=\mathrm{cs}\,u$，得

$$\mathrm{dn}^2u=-\mathrm{cs}^2(u+iK')=\mathscr{P}(u+iK'|2\Omega_n)+e_1$$

Ω_n 是生成元为 K 和 iK' 的格阵。因为 $2\Omega_n$ 是规一化格阵，所以 $e_1-e_2=1$，$e_3-e_2=k^2$，$e_1-e_3=k'^2$，以及 $e_1+e_2+e_3=0$．由此得

$$e_1 = \frac{1}{3}(2-k^2)$$

因此

$$S = \zeta(u+iK'|2\Omega_n) + \frac{1}{3}(2-k^2)u + c$$

c 是积分常数，取决于椭圆弧长的起始点。取 $z=0$，则我们可定义雅各比函数 Eu

$$Eu = E(u, k) = \int_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = \int_0^u \mathrm{dn}^2 u du$$

$$= \zeta(u+iK'|2\Omega_n) - \eta_2(2\Omega_n) + \frac{1}{3}(2-k^2)u \quad (3.29)$$

由此式可见 Eu 不是椭圆函数。现在来考虑在格阵 $2\Omega_n$ 上，当 u 产生 $2K$ 及 $2iK'$ 增量时函数的变化。一方面，由 (3.6) 式及 (3.29) 式得

$$E(u+2K) - E(u) = \zeta(u+2K+iK')$$

$$-\zeta(u+iK') + \frac{2}{3}(2-k^2)K = 2\eta_1 + \frac{2}{3}(2-k^2)K$$

$$E(u+2iK') - E(u) = \zeta(u+3iK') - \zeta(u+iK')$$

$$+\frac{2}{3}(2-k^2)K = 2\eta_2 + \frac{2}{3}(2-k^2)iK' \quad (3.30)$$

另一方面由定义式得

$$E(u+2K) = \int_0^{u+2K}\mathrm{dn}^2 u du = \int_0^{2K}\mathrm{dn}^2 u du$$

$$+\int_{2K}^{u+2K}\mathrm{dn}^2 u du$$

第一个积分为

$$\int_0^K \mathrm{dn}^2 u du + \int_K^{2K}\mathrm{dn}^2 u du = \int_0^K [\mathrm{dn}^2 u + \mathrm{dn}^2(2K-u)] du$$

$$= 2\int_0^K \mathrm{dn}^2 u du = 2E(K) = 2E$$

得

$$E(2K) = 2E(K) = 2E \quad (3.31)$$

E或$E(K)$ 是第二种全椭圆积分

$$E=E(K)=\int_0^K \mathrm{dn}^2 u du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\, d\varphi$$

$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz \tag{3.32}$$

第二个积分为

$$\int_0^u \mathrm{dn}^2(u+2K)du=\int_0^u \mathrm{dn}^2 u du=E(u)$$

因此得

$$E(u+2K)-E(u)=2E \tag{3.33}$$

同理得

$$E(u+2iK')-E(u)=E(2iK') \tag{3.34}$$

为了求得$E(2iK')$，先来求$E(iu)=E(iu,\ k)$。在(3.29)式中用iu替代u得

$$E(iu,\ k)=i\int_0^u \mathrm{dn}^2(iu,\ k)du=i\int_0^u \mathrm{dc}^2(u,\ k')du$$

式中运用了等式$\mathrm{dn}(iu,\ k)=\mathrm{dc}(u,\ k')$，这在第七章中将要给予证明。

用(2.43)式得

$$\frac{d}{du}(u+\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sc}\,u)$$

$$=1-k^2\mathrm{sc}\,u\cdot\mathrm{sn}\,u\cdot\mathrm{cn}\,u+\mathrm{dn}\,u\cdot\mathrm{dc}\,u\cdot\mathrm{nc}\,u$$

$$=1-k^2\mathrm{sn}^2 u+\frac{\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}^2 u}=\mathrm{dn}^2 u+\mathrm{dc}^2 u$$

即

$$\mathrm{dc}^2 u=\frac{d}{du}(u+\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sc}\,u)-\mathrm{dn}^2 u$$

代入上面积分式得

$$E(iu,\ k)=iu+i\,\mathrm{dn}(u,\ k')\cdot\mathrm{sc}(u,\ k')-iE(u,\ k') \tag{3.35}$$

将(3.31)式中的k用k'替代得

$$E(2K',\ k')=2E'$$

在 (3.35) 式中令 $u=2K'$ 得

$$E(2iK',\ k)=2(K'-E')i \tag{3.36}$$

代入 (3.34) 得

$$E(u+2iK')-E(u)=2(K'-E')i \tag{3.37}$$

(3.33) 式和 (3.37) 式表明Eu不是周期性函数。由该二式和 (3.30) 式得

$$2E=2\eta_1+\frac{2}{3}(2-k^2)K$$

$$2(K'-E')i=2\eta_2+\frac{2}{3}(2-k^2)K'i \tag{3.38}$$

将该式代入勒让德-卫尔斯特拉斯关系式$\eta_1 K'i-\eta_2 K=\pi i/2$，得

$$KE'+K'E-KK'=\frac{\pi}{2} \tag{3.39}$$

这个结果称之为勒让德关系式，它把第一和第二种全椭圆积分连系在一起。

类似第一种全椭圆积分K，第二种全椭圆积分亦可展成k的级数，为此对$(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}$用二项式定律展开，在0到$\pi/2$上进行逐项积分，得

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2 3}{2^2 4^2}k^4-\frac{1^2 3^2 5}{2^2 4^2 6^2}k^6-\frac{1^2 3^2 5^2 7}{2^2 4^2 6^2 8^2}k^8-\cdots\right\} \tag{3.40}$$

这个级数同理在$|k|<1$时为绝对和均一收敛。

§3.4 西他(Theta)函数

西他函数具有一个实数周期，而且可以表示为收敛很快的级数式。这里将要介绍几种西他函数的基本表示式，包括级数式和无穷乘积式。给出函数的若干基本性质，包括函数的零点，在特殊点上函数值，函数的周期性，微分方程，各函数间的关系等。至于西他函数与其他椭圆函数间的关系，将在以后章节中研究。

§3.4.1 一般西他函数

对于周期为2ω和$2\omega'$的椭圆函数$f(u)$，若用2ω去除自变量u，得到自变量v即

$$v=\frac{u}{2\omega},\quad \tau=\frac{\omega'}{\omega} \tag{3.41}$$

则$f(v/\tau)$的二个周期是1和τ，仍设$I_m(\tau)>0$。用$(v,\ \tau)$可以构造出收敛很快的西他函数。例如基本西他函数之一可以表示为下形无穷级数

$$\vartheta_3(v)=\vartheta_3(v/\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\{(n^2\tau+2nv)\pi i\} \tag{3.42}$$

这是v，τ的函数。若令

$$q=e^{i\pi\tau} \tag{3.43}$$

由于$I_m(\tau)>0$，故$|q|<1$，使得上列级数对于任意有限的v为绝对收敛。可将$\vartheta_3(v)$写成三角函数式

$$\vartheta_3(v)=1+2[q\cos2\pi v+q^4\cos4\pi v+q^9\cos6\pi v+\cdots]$$

$\vartheta_3(v)$是v的超越整函数，其周期为1，有

$$\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v) \tag{3.44}$$

当v的增量是τ时得

$$\vartheta_3(v+\tau)=\exp[-(\tau+2v)\pi i]\sum_{m=-\infty}^{\infty}\exp\{[(m+1)^2\tau$$

$$+(2m+1)v]\pi i\}=\exp[-(\tau+2v)\pi i]\sum_{n=-\infty}^{\infty}$$

$$\exp\{(n^2\tau+2nv)\pi i\}$$

即

$$\vartheta_3(v+\tau)=\exp[-(\tau+2v)\pi i]\cdot\vartheta_3(v) \tag{3.45}$$

这表明$\vartheta_3(v)$不是双周期函数（当然不是椭圆函数）。但可以由该函数得到一个椭圆函数。对上式二边取对数，并在二边对v求二阶导数得

$$\varphi(v)=\frac{d^2}{dv^2}\ln\vartheta_3(v)$$

并有

$$\varphi(v+1)=\varphi(v),\quad \varphi(v+\tau)=\varphi(v)$$

函数φ是以1和τ为双周期的函数。该函数具有二阶极点。因为函数$\vartheta_3(v)$为具有零点的整函数，它的对数的导数仅有奇点为一阶极点，该极点对应$\vartheta_3(v)$的零点。故$\varphi(v)$的仅有奇点是二阶极点，即$\varphi(v)$是椭圆函数。

西他函数的一般表示式为

$$\vartheta_{ab}(v|\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}a\right)^2\tau\pi i+2i\left(n+\frac{1}{2}a\right)\left(v\pi-\frac{1}{2}b\pi\right)\right\}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}a\right)^2}e^{2\pi i\left(n+\frac{1}{2}a\right)\left(v-\frac{1}{2}b\right)} \qquad (3.46)$$

式中a，b为二个实数。当$a=0$，$b=0$时，立即得到$\vartheta_3(v)$。当$|q|<1$（对应$I_m(\tau)>0$时），函数在v的全平面上是解析的，而v的虚部满足$(2n+a)\cdot I_m(v)>0$时，级数为绝对收敛。

由于(3.46)式的级数中同时出现$\pm n$的项对，因此公项为具有下列对应式

$$\left(n+\frac{1}{2}a\right)^2\leftrightarrow\left(n-\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$\left(n+\frac{1}{2}a\right)\left(v-\frac{1}{2}b\right)\leftrightarrow\left(n-\frac{1}{2}a\right)\left(-v+\frac{1}{2}b\right)$$

$$\left(n+\frac{1}{2}a\right)\left(-v+\frac{1}{2}b\right)\leftrightarrow\left(n-\frac{1}{2}a\right)\left(v+\frac{1}{2}b\right)$$

的二级数相等。由此得

$$\vartheta_{(-a)(-b)}(-v|\tau)=\vartheta_{ab}(v|\tau) \qquad (3.47)$$

$$\vartheta_{(-a)(-b)}(v|\tau)=\vartheta_{ab}(-v|\tau)$$

如果 a 是整数，只改变函数符号不改变其奇偶性；如果 b 是整数时则级数的第 n 项乘以因子 $e^{-(2n+a)b\pi i}=e^{-ab\pi i}$；如果 a，b 二者均是整数，则有

$$\vartheta_{ab}(-v\mid\tau)=(-1)^{ab}\vartheta_{ab}(v\mid\tau) \tag{3.48}$$

可见当 a，b 为整数时，函数对 v 的奇偶性取决于乘积 ab 是偶数或奇数。

下面分别研究当参数 a，b 和变量 u 中某一个有增量时函数的变化。对于任意实数 k，l 有

$$\vartheta_{(a+l)b}(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l\right)^2\tau\pi i\right.$$
$$\left.+2\pi i\left(n+\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}l\right)\left(v-\frac{1}{2}b\right)\right\}$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}a\right)^2\tau\pi i\right.$$
$$+2\pi i\left(n+\frac{1}{2}a\right)\left(v+\frac{1}{2}l\tau-\frac{1}{2}b\right)+\frac{1}{4}l^2\tau\pi i$$
$$\left.+l\pi i\left(v-\frac{1}{2}b\right)\right\}$$
$$=q^{\left(\frac{l}{2}\right)^2}e^{l\pi i\left(v-\frac{1}{2}b\right)}\vartheta_{ab}\left(v+\frac{1}{2}l\tau\right) \tag{3.49}$$

$$\vartheta_{a(b-k)}(v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left\{\left(n+\frac{1}{2}a\right)^2\tau\pi i\right.$$
$$\left.+2\pi i\left(n+\frac{1}{2}a\right)\left(v-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}k\right)\right\}$$
$$=\vartheta_{ab}\left(v+\frac{1}{2}k\right)=e^{\left(n+\frac{1}{2}a\right)k\pi i}\vartheta_{ab}(v) \tag{3.50}$$

当 $l=2m$，m 为整数时，得

$$\vartheta_{(a+2m)b}(v)=\vartheta_{ab}(v) \tag{3.51}$$

因为级数中第 n 项变为 $n+m$ 项时，不改变和式。当 $k=2m$ 时得

$$\vartheta_{a(b+2m)}(v)=e^{-ma\pi i}\vartheta_{ab}(v) \tag{3.52}$$

此时若 a 也取整数时得

$$\vartheta_{a(b+2m)}(v)=\begin{cases}\vartheta_{ab}(v), & a=\text{偶整数}\\(-1)^m\vartheta_{ab}(v), & a=\text{奇整数}\end{cases} \tag{3.53}$$

在 (3.49) 式中用 $v+\frac{1}{2}k$ 替代 v，并考虑到(3.50)式得

$$\vartheta_{ab}\left[v+\frac{1}{2}(k+\tau l)\right]$$

$$=q^{-\left(\frac{l}{2}\right)^2}e^{-l\pi i\left[v-\frac{1}{2}(b-k)\pi\right]}\vartheta_{(a+l)(b+k)}(v) \tag{3.54}$$

当 k 和 l 分别是偶整数 $2m$ 和 $2n$ 时

$$\vartheta_{al}[v+m+n\tau]=q^{-n^2}e^{-2n\pi i\left(v+m-\frac{1}{2}b\right)}\vartheta_{(a+2n)(b-2m)}(v)$$

$$=q^{-n^2}e^{-2n\pi vi}e^{(ma+nb)\pi i}\vartheta_{ab}(v)$$

如果 a， b 也是整数，则简化为

$$\vartheta_{ab}[v+m+n\tau]=(-1)^{ma+nb}q^{-n^2}e^{-2n\pi vi}\vartheta_{ab}(v) \tag{3.55}$$

由该式很易得到 v 有周期（1 或 v）增量时的值。分别令 $(m,\ n)$ 为 $(1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 时得

$$\vartheta_{ab}[v+1]=(-1)^a\vartheta_{ab}(v)$$

$$\vartheta_{ab}[v+\tau]=(-1)^b q^{-1}e^{-2\pi vi}\vartheta_{ab}(v) \tag{3.56}$$

在 (3.54) 式中，令 $(k,\ l)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 1)$，可以得到半周期处的函数值

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_{ab}\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_{a(b-1)}(v)\\&\vartheta_{ab}\left(v+\frac{1}{2}\tau\right)=q^{-4/1}e^{-\pi vi}e^{\frac{1}{2}b\pi i}\vartheta_{(a+1)b}(v)\\&\vartheta_{ab}\left(v+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\tau\right)\\&=q^{-4/1}e^{-\pi vi}e^{\frac{1}{2}(b-1)\pi i}\vartheta_{(a+1)(b-1)}(v)\end{aligned}\right\} \tag{3.57}$$

§3.4.2 四个西他函数

西他函数是由雅各比定义的，最初他在 1829 年引入西他函数$\Theta(u)$ 和$H(u)$，用的是规一化格阵 $2K$，$2iK'$

$$\Theta(u)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n}q^{n^2}e^{n\pi ui/K}=1-2q\cos\left(\frac{\pi u}{K}\right)$$

$$+2q^4\cos\left(\frac{2\pi u}{K}\right)-2q^9\cos\left(\frac{3\pi u}{K}\right)+\cdots \tag{3.58}$$

$$H(u)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^{2n-1}q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}e^{\frac{1}{2}(2n-1)\pi ui/K}=2q^{1/4}\sin\left(\frac{\pi u}{2K}\right)$$

$$-2q^{9/4}\sin\left(\frac{3\pi u}{2K}\right)+2q^{25/4}\sin\left(\frac{5\pi u}{2K}\right)-\cdots \tag{3.59}$$

式中 $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$。当 u 有增量K时

$$\Theta(u+K)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{n\pi ui/K} \tag{3.60}$$

$$H(u+K)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}e^{\frac{1}{2}(2n-1)\pi ui/K} \tag{3.61}$$

后来雅各比看到用 $v=u/2K$ 作为变量的优越性，即令

$$v=\frac{u}{2K},\quad \tau=\frac{iK'}{K},\quad q=e^{\pi\tau i}$$

用 v 和 τ 则Θ和H可以写为

$$\Theta(u)=\sum_{n=\ \ \infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2n\pi vi}=1-2q\cos 2\pi v$$

$$+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v+\cdots \tag{3.62}$$

$$H(u)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty} i(-1)^n q^{(n-1/2)^2}e^{(2n-1)\pi vi}$$

$$=2q^{1/4}\sin\pi v-2q^{9/4}\sin 3\pi v+2q^{25/4}\sin 5\pi v-\cdots \tag{3.63}$$

$$\Theta(u+K)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi v i} \tag{3.64}$$

$$H(u+K)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{(n-1/2)^2} e^{(2n-1)\pi v i} \tag{3.65}$$

这样就得到了四个西他函数

$$\vartheta(v)=\Theta(u),\quad \vartheta_1(v)=H(u)$$

$$\vartheta_2(v)=H(u+K),\quad \vartheta_3(v)=\Theta(u+K)$$

这四个函数分别对应（3.6）式中（a，b）取（0，1），（1，1），（1，0），（0，0）时的值，即

$$\vartheta(v)=\vartheta_{01}(v),\quad \vartheta_1(v)=\vartheta_{11}(v)$$

$$\vartheta_2(v)=\vartheta_{10}(v),\quad \vartheta_3(v)=\vartheta_{00}(v)$$

具有特征参量a，b的一般西他函数的理论是哈米特（Hermite）继雅各比之后于1858年引入的。莱瑞尔（Neville）则用了下标n，s，c，d，来表示这四种函数。现将这几种表示法同时写出，注意到

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(2n-1)\pi i}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(2n+1)\pi i}$$

则有

$$\begin{aligned}\vartheta_1(v)&=H(u)=\vartheta_{11}(v)=\vartheta_s(v)\\ &=\sum_{n=-\infty}^{\infty} i(-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi v i}\\ &=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)\pi v\\ &=2q^{1/4}\sin\pi v-2q^{9/4}\sin 3\pi v+2q^{25/4}\sin 5\pi v-\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\vartheta_2(v)=H(u+K)=\vartheta_{10}(v)=\vartheta_c(v)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n-1)\pi vi}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\cos(2n+1)\pi v$$

$$=2q^{1/4}\cos\pi v+2q^{9/4}\cos 3\pi v+2q^{25/4}\cos 5\pi v+\cdots\cdots \tag{3.67}$$

$$\vartheta_3(v)=\Theta(u+K)=\vartheta_{00}(v)=\vartheta_d(v)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}e^{2n\pi vi}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\cos 2n\pi v$$

$$=1+2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v+2q^9\cos 6\pi v+\cdots\cdots \tag{3.68}$$

$$\vartheta_4(v)=\Theta(u)=\vartheta_{01}(v)=\vartheta_n(v)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}e^{2n\pi vi}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2n\pi v$$

$$=1-2q\cos 2\pi v+2q^4\cos 4\pi v-2q^9\cos 6\pi v+\cdots\cdots \tag{3.69}$$

由于第一函数展开式仅包含正弦函数项级数，而其余三个为余弦函数项级数，因此 ϑ_1 是 v 的奇函数，而其余三个则是 v 的偶函数。

根据（3.55）式可以得到各函数的变换公式

$$\vartheta_k(v+m+n\tau)=C_k q^{-n^2}e^{-2n\pi vi}\vartheta_k(v) \tag{3.70}$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$c_1=(-1)^{m+n},\quad c_2=(-1)^m,\quad c_4=(-1)^n,\quad c_3=1$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_1(v+1)=-\vartheta_1(v) && \vartheta_1(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi vi}\vartheta_1(v)\\
&\vartheta_2(v+1)=-\vartheta_2(v) && \vartheta_2(v+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi vi}\vartheta_2(v)\\
&\vartheta_3(v+1)=\vartheta_3(v) && \vartheta_3(v+\tau)=q^{-1}e^{-2\pi vi}\vartheta_3(v)\\
&\vartheta_4(v+1)=\vartheta_4(v) && \vartheta_4(v+\tau)=-q^{-1}e^{-2\pi vi}\vartheta_4(v)
\end{aligned}\right\} \tag{3.71}$$

可见西他函数不是双周期函数，可将其称作拟二重周期函数。它们均是 v 的整函数。

由 (3.57) 式和 (3.66)～(3.69) 式得

$$
\left.\begin{array}{ll}
\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_2(v) & \vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-1/4}e^{-\pi vi}\vartheta_4(v) \\
\vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right)=-\vartheta_1(v) & \vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-1/4}e^{-\pi vi}\vartheta_3(v) \\
\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_4(v) & \vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=q^{-1/4}e^{-\pi vi}\vartheta_2(v) \\
\vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}\right)=\vartheta_3(v) & \vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right)=iq^{-1/4}e^{-\pi vi}\vartheta_1(v)
\end{array}\right\}
\tag{3.72A}
$$

或

$$
\left.\begin{array}{l}
\vartheta_3(v)=q^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_2\left(v+\frac{\tau}{2}\right) \\
\qquad =q^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=\vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}\right) \\
\vartheta_4(v)=-iq^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right) \\
\qquad =iq^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}\right) \\
\vartheta_1(v)=-iq^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_4\left(v+\frac{\tau}{2}\right) \\
\qquad =-iq^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_3\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=-\vartheta_2\left(v+\frac{1}{2}\right) \\
\vartheta_2(v)=q^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_3\left(v+\frac{\tau}{2}\right) \\
\qquad =q^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_4\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)=\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)
\end{array}\right\}
\tag{3.72B}
$$

由 (3.66) 式知原点是 ϑ_1 的零点，再由 (3.71) 式的第一式用递推法知

$$v=m+n\tau$$

是 ϑ_1 的零点，即以 1 和 τ 为生成元的格阵点是 ϑ_1 的零点。其它

三个函数的零点可由（3.72B）式推出。例如求 ϑ_3 的零点可根据下式

$$v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}=m+n\tau$$

由此得 ϑ_3 的零点

$$v=\left(m-\frac{1}{2}\right)+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$$

今将四个函数的零点列表如下

$$\left.\begin{aligned}
&\vartheta_1: &\quad &\vartheta_{10}=m+n\tau\\
&\vartheta_2: &\quad &\vartheta_{20}=m+n\tau+\frac{1}{2}\\
&\vartheta_3: &\quad &\vartheta_{30}=m+n\tau+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\\
&\vartheta_4: &\quad &\vartheta_{40}=m+n\tau+\frac{\tau}{2}
\end{aligned}\right\}\qquad(3.73)$$

这里所示的零点是各函数唯一的一阶零点。可用 ϑ_1 为例证明如下

取 c 为以 v_0, v_0+1, $v_0+1+\tau$, $v_0+\tau$ 为顶点的平行四边形，该四边形不经过 ϑ_1 的零点，则 ϑ_1 在 c 内的零点个数为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv$$

因为 $\vartheta_1(v)$ 在 v 平面的有限部分上为正则函数。另一方面

$$\int_c\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv=\int_{v_0}^{v_0+1}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv+\int_{v_0+1}^{v_0+1+\tau}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv$$

$$+\int_{v_0+1+\tau}^{v_0+\tau}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv+\int_{v_0+\tau}^{v}\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv$$

$$=\int_0^{v_0+1}\left[\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}-\frac{\vartheta_1'(v+\tau)}{\vartheta_1(v+\tau)}\right]dv$$

$$-\int_{v_0}^{v_0+\tau}\left[\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}-\frac{\vartheta_1'(v+1)}{\vartheta_1(v+1)}\right]dv$$

由（3.71）式知

$$\ln\vartheta_1(v+1)=\ln\vartheta_1(v)+P,$$

$$\ln\vartheta_1(v+\tau)=\ln\vartheta_1(v)-2\pi vi+Q$$

P，Q是与v无关的常数，进一步得

$$\frac{\vartheta_1'(v+1)}{\vartheta_1(v+1)}=\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}$$

$$\frac{\vartheta_1'(v+\tau)}{\vartheta_1(v+\tau)}=\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}-2\pi i$$

因此上述第二项积分等于0，故得

$$\int_c\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}dv=2\pi i$$

这表明$\vartheta_1(v)$在c内仅有一个一阶零点。

四个西他函数在周期和半周期上的值为：

	(1)	(2)
$v=$	$m+n\tau,$	$m+n\tau+\frac{1}{2}$
$\vartheta_1(v)=$	$0,$	$(-1)^m q^{-n^2}\vartheta_2$
$\vartheta_2(v)=$	$(-1)^m q^{-n^2}\vartheta_2,$	0
$\vartheta_3(v)=$	$q^{-n^2}\vartheta_3,$	$(-1)^n q^{-n^2}\vartheta_4$
$\vartheta_4(v)=$	$(-1)^n q^{-n^2}\vartheta_4,$	$q^{-n^2}\vartheta_3$

	(3)	(4)
$v=$	$m+n\tau+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},$	$m+n\tau+\frac{\tau}{2}$
$\vartheta_1(v)=$	$(-1)^m q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\vartheta_3,$	$(-1)^{m+n} iq^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\vartheta_4$
$\vartheta_2(v)=$	$(-1)^{m+n+1} iq^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\vartheta_4,$	$(-1)^n q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\vartheta_3$
$\vartheta_3(v)=$	$0,$	$q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\vartheta_2$
$\vartheta_4(v)=$	$q^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\vartheta_2,$	0

(3.74)

§3.4.3 西他函数的微分方程

对一般西他函数（3.46）式，若对v求偏导数，其结果是使

级数的第 n 项乘上因子 $2\pi i(n+a/2)$。再求一次偏导数，又乘上一个相同的因子。如该式对 τ 求偏导数，则第 n 项乘上因子 $\pi\tau i(n+a/2)^2$。显然不影响该级数的收敛性。因此对于任意西他函数，特别是 ϑ_1，ϑ_2，ϑ_3，ϑ_4，满足下列微分方程

$$\frac{\partial^2\vartheta_k}{\partial v^2}=4\pi i\frac{\partial\vartheta_k}{\partial\tau}\quad k=1,2,3,4 \tag{3.57}$$

在证明另一重要微分方程之前，先考察当 $v=0$ 时 $\vartheta_1'(0)$ 以及 $\vartheta_k(0)$，$k=2,3,4$ 的值。由（3.66）～（3.69）式得

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_1'&=\vartheta_1'(0)=\lim_{v\to 0}\frac{\vartheta(v)}{v}\\
&=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\\
\vartheta_2&=\vartheta_2(0)=2\sum_{n=0}^{\infty}q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\\
\vartheta_3&=\vartheta_3(0)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\\
\vartheta_4&=\vartheta_4(0)=1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.76}$$

下面来证明下列微分方程式

$$\vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4 \tag{3.77}$$

先研究下列函数

$$f(v)=\frac{\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_1(2v)}$$

该式的分子分母在 v 的全平面上是解析的，而且以 1，τ 为周期的格阵点和半格阵点是函数的简单零点。由（3.70）式可以看出当变量由 $v\to v+m+n\tau$ 时，其分子应乘上因子 $q^{-4n^2}e^{-8n\pi vi}$，而分母也乘以相同的因子，因此 $f(v)$ 的值不变。这表明 $f(v)$ 是双周期函数。但由于 $f(v)$ 没有极点，因此它应等于一个常数。为了求得这个常数值，令 $v=0$，并考虑到

$$\lim_{v \to 0} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1(2v)} = \frac{1}{2}$$

得常数值 $f(v) = \frac{1}{2}\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$，因此

$$\frac{1}{2} \frac{\vartheta_1(2v)}{\vartheta_1(v)} = \frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4} \tag{3.78}$$

将所有函数展成泰勒级数

$$\frac{1}{2} \frac{\vartheta_1' 2v + \frac{1}{6}\vartheta_1'''(0)8v^3 + \cdots}{\vartheta_1' v + \frac{1}{6}\vartheta_1'''(0)v^3 + \cdots} = \left(1 + \frac{\vartheta_1'''(0)}{2\vartheta_1'} v^2 + \cdots\right)$$

$$= \left(1 + \frac{\vartheta_2''(0)}{2\vartheta_2} v^2 + \cdots\right)\left(1 + \frac{\vartheta_3''(0)}{2\vartheta_3} v^2 + \cdots\right)$$

$$\left(1 + \frac{\vartheta_4''(0)}{2\vartheta_4} v^2 + \cdots\right)$$

令上式第二个等号二边的 v^2 系数相等，得

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'} = \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3} + \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4} \tag{3.79}$$

对微分方程 (3.75)，令 $k = 1$，对 v 再求一次偏导数并令 $v = 0$ 得

$$\vartheta_1''' = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial \tau}$$

对 $k = 2, 3, 4$，令 $v = 0$ 得

$$\vartheta_k'' = 4\pi i \frac{\partial \vartheta_k}{\partial \tau}, \quad (k = 2, 3, 4)$$

将上式代入 (3.79) 式得

$$\frac{1}{\vartheta_1'} \frac{\partial \vartheta_1'}{\partial \tau} = \frac{1}{\vartheta_2} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \tau} + \frac{1}{\vartheta_3} \frac{\partial \vartheta_3}{\partial \tau} + \frac{1}{\vartheta_4} \frac{\partial \vartheta_4}{\partial \tau}$$

求积分得

$$\vartheta_1' = c\,\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$$

常数 c 与 v，q 无关。当 $q \to 0$ 时，由 (3.76) 式得

$$\vartheta_3 = \vartheta_4 = 1$$

$$\lim_{q\to 0}\frac{\vartheta_1'}{\vartheta_2}=\pi$$

上式考虑到 ϑ_1' 与 ϑ_2 级数的第一项均是 $q^{1/4}$。将此结果代入上面 ϑ_1' 式，得 $c=\pi$。可见（3.77）式成立。

最后证明又一个微分方程

$$\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}\right]=\pi\vartheta_4^2\frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_4^2(v)} \tag{3.80}$$

为此研究函数

$$f(v)=\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}-\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}$$

由（3.71），（3.73）式可以看出 $f(v)$ 是以 1 和 τ 为双周期的函数，其极点为 $v=0$ 和 $-\tau/2$，而零点为 $1/2$ 和 $(-1-\tau)/2$。另一方面 $f(v)$ 可以表成下式

$$f(v)=c\frac{\vartheta_1\left(v-\frac{1}{2}\right)\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_1(v)\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)}$$

$$=ic\frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_1(v)\vartheta_4(v)}$$

因为 $\lim\limits_{v\to 0}vf(v)=1$，故得 $ic=\vartheta_1'\vartheta_4/(\vartheta_2\vartheta_3)=\pi\vartheta_4^2$ 所以有

$$\vartheta_1'(v)\vartheta_4(v)-\vartheta_1(v)\vartheta_4'(v)=\pi\vartheta_4^2\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)$$

两边同除 $\vartheta_4^2(v)$，立即得（3.80）式。

§3.4.4 西他函数的平方关系式

由（3.70）式得

$$\vartheta_k^2(v+m+n\tau)=q^{-2n^2}e^{-4n\pi vi}\vartheta_k^2(v)$$

$$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

上列任意二个平方函数之比是一个椭圆函数，其周期为 1 和 τ。其二阶零点和极点分别是分子和分母函数的零点，即 $v=0, 1/2, (1+\tau)/2, \tau/2$ 分别是相应比值函数的零点或极点。若用

i，j，l 表示上述四个函数中的任意三个，则选择二个的线性组合与第三个之比有可能等于常数 c，即

$$\frac{A\vartheta_i^2(v)+B\vartheta_j^2(v)}{\vartheta_l^2(v)}=c$$

因为可以任选常数A，B使分子分母的零点消去一个，而使商函数是最多只有一个极点的椭圆函数，它只能是一个常数。四个平方函数中三个的组合共有四个，可以写成下列关系式：

$$\begin{bmatrix} 0 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & 0 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & 0 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vartheta_1^2(v) \\ \vartheta_2^2(v) \\ \vartheta_3^2(v) \\ \vartheta_4^2(v) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

依次将 $v=0$，$1/2$，$\tau/2$ 代入上式，并用（3.74）式得

$$v=0，\quad C_2\vartheta_3^2+D_2\vartheta_4^2=B_3\vartheta_2^2+D_3\vartheta_4^2=B_4\vartheta_2^2+C_4\vartheta_2^2=0$$

$$v=\frac{1}{2}，\quad C_1\vartheta_4^2+D_1\vartheta_3^2=A_2\vartheta_2^2+D_3\vartheta_3^2=A_4\vartheta_2^2+C_4\vartheta_4^2=0$$

$$v=\frac{\tau}{2}，\quad B_1\vartheta_3^2+C_1\vartheta_2^2=-A_2\vartheta_4^2+C_2\vartheta_2^2=-A_3\vartheta_4^2+B_3\vartheta_3^2=0$$

由此可以得到关于函数平方的下列矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & -\vartheta_2^2 & \vartheta_3^2 & -\vartheta_4^2 \\ \vartheta_2^2 & 0 & \vartheta_4^2 & -\vartheta_3^2 \\ -\vartheta_3^2 & -\vartheta_4^2 & 0 & \vartheta_2^2 \\ \vartheta_4^2 & \vartheta_3^2 & -\vartheta_2^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vartheta_1^2(v) \\ \vartheta_2^2(v) \\ \vartheta_3^2(v) \\ \vartheta_4^2(v) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.81}$$

由于 ϑ_2，ϑ_3，ϑ_4 不等于0，故四个方程中的任意三个是线性独立的。上列系数矩阵是反对称的，它的系数行列式是$-\vartheta_2^4-\vartheta_4^4+\vartheta_3^4$。根据四个函数有非零解的条件立即得：

$$\vartheta_3^4=\vartheta_2^4+\vartheta_4^4 \tag{3.82}$$

另外若令 $v=0$，由（3.81）式的第一行立即得到（3.82）式。

§ 3.4.5 西他函数的无穷乘积式

首先建立 ϑ_4 的无穷乘积式。已知 ϑ_4 的零点

$$\vartheta_{40}=m+n_1\tau+\frac{\tau}{2}=m+(n-1)\tau+\frac{\tau}{2}$$

$$=m+\left(n-\frac{1}{2}\right)\tau$$

以上将 n_1 换成（$n-1$）不失一般项数的意义。现在考察下列因子乘积

$$(1-q^{2n-1}e^{2\pi vi})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi vi})=1-q^{2n-1}e^{-2\pi vi}-$$
$$q^{2n-1}e^{2\pi vi}+q^{2(2n-1)}$$

将 $v=m+\left(1-\frac{1}{2}\right)\tau$ 代入，考虑到 $e^{2\pi vi}=q^{2n-1}$，则上式等于零。因此可将 ϑ_4（v）写成

$$\vartheta_4(v)=G\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n-1}e^{2\pi vi})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi vi})\} \quad (3.83)$$

G 是一个与 v 无关的因子。为了证明这个性质，利用 $\vartheta_4(v)$ 对 v 的周期性质。当 v 变为 $v+1$ 时，（3.83）式的右方乘积不变。当 v 变为 $v+\tau$ 时，右方乘积变为

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n+1}e^{2\pi vi})(1-q^{2n-3}e^{-2\pi vi})$$

$$=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2\pi vi})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi vi})(1-q^{-1}e^{-2\pi vi})/(1-q^{2\pi vi})$$

$$=-q^{-1}e^{-2\pi vi}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2\pi vi})(1-q^{2n-1}e^{-2\pi vi})$$

所得的无穷乘积与 ϑ_4（v）的相同。因此该无穷乘积与 ϑ_4（v）的比值是没有奇点的双周期函数，根据椭圆函数定理（无奇点的双周期函数是一个常数），知它必为常数，即 G 与 v 无关。

依次将 v 换成 $v+1/2$，$v+\tau/2$，$v+1/2+\tau/2$ 得

$$\vartheta_3(v)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1}e^{2\pi vi})(1+q^{2n-1}e^{-2\pi vi}) \quad (3.84)$$

$$\vartheta_1(v)=2Gq^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{2\pi vi})(1-q^{2n}e^{-2\pi vi}) \quad (3.85)$$

$$\vartheta_2(v)=2Gq^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n}e^{2\pi vi})(1+q^{2n}e^{-2\pi vi}) \quad (3.86)$$

为了确定G，由（3.83)～(3.86）式令$v=0$得

$$\vartheta_1'=2\pi Gq^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2$$

$$\vartheta_2=2Gq^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^2$$

$$\vartheta_3=G\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^2$$

$$\vartheta_4=G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^2$$

运用关系式$\vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$得

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2&=G^2\prod_{n=1}^{\infty}[(1+q^{2n})(1+q^{2n-1})]^2(1-q^{2n-1})^2\\&=G^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})^2(1-q^{2n-1})^2\\&=G^2\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})^2[(1-q^{n})/(1-q^{2n})]^2\\&=G^2\end{aligned}$$

取上式的平方根，并考虑到当$v=0$，$q\to0$时，$\vartheta_4=1$，因此有

$$G=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

将G代入（3.83）～（3.86）式，并将各乘式中二个因子乘开则得四个函数的无穷乘积式

$$\vartheta_1(v)=2q^{1/4}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1-2q^{2n}\cos2\pi v+q^{4n})\} \tag{3.87}$$

$$\vartheta_2(v)=2q^{1/4}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1+2q^{2n}\cos2\pi v+q^{4n})\} \tag{3.88}$$

$$\vartheta_3(v)=\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1+2q^{2n-1}\cos2\pi v+q^{4n-2})\} \tag{3.89}$$

$$\vartheta_4(v)=\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1-2q^{2n-1}\cos2\pi v+q^{4n-2})\} \tag{3.90}$$

而ϑ_1'，ϑ_2，ϑ_3，ϑ_4为

$$\vartheta_1'=2\pi q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^3 \tag{3.91}$$

$$\vartheta_2=2q^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1+q^{2n})^2\} \tag{3.92}$$

$$\vartheta_3=\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1+q^{2n-1})^2\} \tag{3.93}$$

$$\vartheta_4=\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})(1-q^{2n-1})^2\} \tag{3.94}$$

§3.5　卫尔特拉斯函数与ϑ函数

首先研究卫尔斯特拉斯σ函数与ϑ函数的关系。将(3.26)与（3.70）进行比较可以看出，当$u\to u+m+n\tau$时，二种函

数具有相同的乘积因子。考虑到这两种函数有相同的零点，因此下列函数之比不具有极点而等于常数 c

$$\frac{\sigma^*(u)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}=C_1;\quad \frac{\sigma_1^*(u)}{\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}=C_2;$$

$$\frac{\sigma_2^*(u)}{\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}=C_3;\quad \frac{\sigma_3^*(u)}{\vartheta_4\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}=C_4.$$

运用 (3.23) 式，即

$$\sigma^*(u)=e^{-1/2\eta_1u^2/\omega_1}\sigma(u)$$

可见

$$\sigma(u)=c_1e^{1/2\eta_1u^2/\omega_1}\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$$

$$\sigma_1(u)=c_2e^{1/2\eta_1u^2/\omega_1}\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$$

$$\sigma_2(u)=c_3e^{1/2\eta_1u^2/\omega_1}\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$$

$$\sigma_3(u)=c_4e^{1/2\eta_1u^2/\omega_1}\vartheta_4\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)$$

对第一个函数式的两边求导，再令 $u=0$ 得

$$1=c_1\frac{1}{2\omega_1}\vartheta_1'(0),\quad c_1=\frac{2\omega_1}{\vartheta_1'}$$

对其余三个函数式，令 $u=0$ 得

$$c_2=\frac{1}{\vartheta_2(0)},\quad c_3=\frac{1}{\vartheta_3(0)},\quad c_4=\frac{1}{\vartheta_4(0)}$$

考虑到 $v=u/2\omega_1$，最后得 σ 与 ϑ 函数间关系式

$$\left.\begin{aligned}
\sigma(u)&=2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}\\
\sigma_1(u)&=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2}\\
\sigma_2(u)&=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3}\\
\sigma_3(u)&=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4}
\end{aligned}\right\}\tag{3.95}$$

其次研究 $\wp u$ 与 $\vartheta(v)$ 间关系。函数 $\wp u$ 与 σu 间存在下列关系式（证明见（5.20）式）

$$\wp u-e_k=\left[\frac{\sigma_k(u)}{\sigma(u)}\right]^2 \quad k=1,\ 2,\ 3 \tag{3.96}$$

这里

$$e_k=\wp(\omega_k);\quad \omega_1=\omega,\quad \omega_3=\omega',\quad \omega_2=-\omega_1-\omega_3=-\omega-\omega'$$

将（3.95）式代入上式得

$$\wp u=e_k+\frac{1}{4\omega_1^2}\left[\frac{\vartheta_1'\vartheta_{k+1}(v)}{\vartheta_{k+1}\vartheta_1(v)}\right]^2 \tag{3.97}$$

根据 $(\wp' u)^2=4(\wp u-e_1)(\wp u-e_2)(\wp u-e_3)$ 和（3.96）式得

$$(\wp' u)^2=4\left[\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)}\right]^2$$

求平方根，并注意

$$\lim_{u\to 0} u^3\wp' u=-2$$

得

$$\wp' u=-2\frac{\sigma_1(u)\sigma_2(u)\sigma_3(u)}{\sigma^3(u)} \tag{3.98}$$

代入（3.95）式和（3.77）式得

$$\wp' u=-\frac{\pi\vartheta_1'^2}{4\omega_1}\frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)}{\vartheta_1^3(v)},\quad v=\frac{u}{2\omega_1} \tag{3.99}$$

（3.97）式和（3.99）式是用西他函数表示 $\wp u$ 和 $\wp' u$。也可用西他函数表示函数 $\wp$ 在格阵点 ω_k 上的值 e_k。

令 $k=2$， $u=\omega_1$， $v=\frac{1}{2}$ 以及 $k=1$， $u=\omega_1+\omega_3$，

$v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$，利用（3.74），（3.77），（3.97）式得

$$\sqrt{e_1-e_2}=i\sqrt{e_2-e_1}=\frac{\pi\vartheta_4^2}{2\omega_1} \tag{3.100}$$

令 $k=3$，$u=\omega_1$，$v=\frac{1}{2}$ 以及 $k=1$，$u=\omega_3$，$v=\frac{\tau}{2}$，得

$$\sqrt{e_1-e_3}=i\sqrt{e_3-e_1}=\frac{\pi\vartheta_3^2}{2\omega_1} \tag{3.101}$$

令 $k=3$，$u=\omega_1+\omega_3$，$v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ 以及 $k=2$，$u=\omega_3$，$v=\frac{\tau}{2}$，得

$$\sqrt{e_2-e_3}=i\sqrt{e_3-e_2}=\frac{\pi\vartheta_2^2}{2\omega_1} \tag{3.102}$$

将（3.100），（3.101），（3.102）式平方，并两两相加或相减，并考虑到 $e_1+e_2+e_3=0$，得

$$12\omega_1^2e_1=\pi^2(\vartheta_3^4+\vartheta_4^4) \tag{3.103}$$

$$12\omega_1^2e_2=\pi^2(\vartheta_2^4-\vartheta_4^4) \tag{3.104}$$

$$12\omega_1^2e_3=-\pi^2(\vartheta_2^4+\vartheta_3^4) \tag{3.105}$$

由（2.10），（2.11）式，可以得到 $\wp u$ 的不变量 g_2，g_3 和多项式判别式 Δ 用西他函数的表示式。因为

$$\begin{aligned}&-6(e_1e_2+e_1e_3+e_2e_3)\\&=(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2-2(e_1+e_2+e_3)^2\\&=\frac{3}{2}g_2\end{aligned}$$

$$e_1e_2e_3=\frac{1}{4}g_3$$

$$\Delta=16(e_1-e_2)^2(e_1-e_3)^2(e_2-e_3)^2$$

故得

$$g_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^4 (\vartheta_2^8 + \vartheta_3^8 + \vartheta_4^8) \tag{3.106}$$

$$g_3 = \frac{4}{27}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^6 (\vartheta_2^4 + \vartheta_3^4)(\vartheta_3^4 + \vartheta_4^4)(\vartheta_4^4 - \vartheta_2^4) \tag{3.107}$$

$$\Delta^{1/4} = 2\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^3 (\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4)^2 = \frac{\pi\vartheta_1'^2}{4\omega_1^3} \tag{3.108}$$

最后研究用 ϑ 函数表示 ζ 函数。由 (3.95) 式

$$\sigma(u) = 2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2} \frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}, \quad v = \frac{u}{2\omega_1}$$

两边取关于 u 的对数的导数，并考虑到 $\zeta(u) = \sigma'(u)/\sigma(u)$ 得

$$\zeta(u) = \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{d}{du}\ln\vartheta_1(v) = \frac{\eta_1}{\omega_1} u + \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\vartheta'(v)}{\vartheta_1(v)} \tag{3.109}$$

上式再对 u 求导一次得

$$\wp u = -\zeta' u = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{(2\omega_1)^2}\,\frac{d}{dv}\,\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} \tag{3.110}$$

$\vartheta_1(v)$ 在原点的展开式是

$$\vartheta_1(v) = \vartheta_1' v + \frac{\vartheta_1'''}{6} v^3 + \cdots$$

$$\vartheta_1'(v) = \vartheta_1' + \frac{\vartheta_1'''}{2} v^2 + \cdots$$

$$\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)} = \frac{1}{v} + \frac{\vartheta_1'''}{3\vartheta_1'} v + \cdots$$

将上式代入 (3.110) 式并与 $\wp u$ 的展开式 ((2.5)式) 比较，再令常数项等于零，得

$$\eta_1 = -\frac{\vartheta_1'''}{12\omega_1\vartheta_1'}, \quad \eta_1 = \zeta(\omega_1) = \zeta(\omega) \tag{3.111}$$

再由 (3.8) 式得

$$\eta_3 = -\frac{\pi i}{2\omega_1} - \frac{\tau\vartheta_1'''}{12\omega_1\vartheta_1'}, \quad \eta_3 = \zeta(\omega_3) = \zeta(\omega') \tag{3.112}$$

至于 ϑ_1' 和 ϑ_1''' 可由 (3.66) 式求导数，并令 $v = 0$ 而得到

$$\vartheta_1' = 2\pi q^{1/4}(1 - 3q^2 + 5q^6 - 7q^{12} + \cdots) \tag{3.113}$$

$$\vartheta_1''' = -2\pi^3 q^{1/4}(1 - 27q^2 + 125q^6 - 343q^{12} + \cdots) \tag{3.114}$$

§3.6 雅各比椭圆函数与ϑ函数

先研究函数 $\mathrm{sn}u$ 的 ϑ 函数定义式。令变量 z 和常数 k 为

$$z = \frac{\vartheta_3\vartheta_1(v)}{\vartheta_2\vartheta_4(v)}, \quad k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad v = \frac{u}{\pi\vartheta_3^2} \tag{3.115}$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\frac{d}{dv}\left[\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_4(v)}\right]$$

将 (3.80) 式代入上式得

$$\frac{dz}{du} = \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_2\vartheta_3}\frac{\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)}{\vartheta_4^2(v)}$$

利用 (3.81) 式中的第三和第二式得

$$1 - z^2 = \frac{\vartheta_4^2\vartheta_2^2(v)}{\vartheta_2^2\vartheta_4^2(v)}, \quad 1 - k^2z^2 = \frac{\vartheta_4^2\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_3^2\vartheta_4^2(v)}$$

由这些式子得

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = (1 - z^2)(1 - k^2z^2)$$

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}}, \quad z = \mathrm{sn}u \tag{3.116}$$

这个式子和 (3.115) 均满足当 $u \to 0$ 时，$z \to 0$，$dz/du \to 1$ 的要求。由 (3.71) 式和 (3.115) 式知，z 是双周期函数，对于变量 v 的周期是 $(2,\ \tau)$，而对 u 是 $(2\pi\vartheta_3^2,\ \pi\tau\vartheta_3^2)$。根据(3.74)式，$v = 0$ 和 1 是 z 的二个零点，$v = \tau/2$ 和 $1 + \tau/2$ 是 z 的二个极点。

当 $v = 1/2$ 时，由(3.74)式得 $z = 1$，再由(3.116)、(2.44)式得

$$u = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2 = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2z^2)}} = K$$

当 $v = (1 + \tau)/2$ 时，得 $z = 1/k$，再由 (2.45) 式得

$$u=\frac{1}{2}\pi\vartheta_3(1+\tau)=\int_1^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

$$=K+iK'$$

由此得

$$K=\frac{\pi}{2}\vartheta_3^2,\quad iK'=K\tau \tag{3.117}$$

$$v=\frac{u}{2K},\quad \tau=\frac{iK'}{K} \tag{3.118}$$

借助 (3.118) 式可将 $z=\mathrm{sn}u$ 的周期、零点和极点用 u 表示。即对于 u，函数的周期是 $(4K, 2K'i)$，零点是 0 和 $2K$，极点是 $K'i$ 和 $2K+K'i$。这些结果均与§2.3 相同。

因此可用 ϑ 函数定义雅各比函数，即

$$\mathrm{sn}\,u=\frac{\vartheta_3\vartheta_1(v)}{\vartheta_2\vartheta_4(v)},\quad v=\frac{u}{2K},\quad \tau=\frac{iK'}{K} \tag{3.119}$$

$$k=\frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2},\quad k'=\frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2}$$

由 $\mathrm{cn}u=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2u}$，$\mathrm{dn}\,u=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2u}$ 和 (3.81) 式可以得到 $\mathrm{cn}u$ 和 $\mathrm{dn}u$ 的定义式

$$\mathrm{cn}u=\frac{\vartheta_4\vartheta_2(v)}{\vartheta_2\vartheta_4(v)},\quad \mathrm{dn}\,u=\frac{\vartheta_4\vartheta_3(v)}{\vartheta_3\vartheta_4(v)} \tag{3.120}$$

根据 (3.71) 式知 $\mathrm{cn}u$ 的周期为 $(4K, 2K+2K'i)$，$\mathrm{dn}u$ 的周期为 $(2K, 4K'i)$，以及零点与极点均与§2.3 相同。利用(3.119) 式和 (3.120) 式可以得到另外三个雅各比-哥来舍尔函数关于 ϑ 函数的表示式

$$\mathrm{sc}\,u=\frac{\vartheta_3\vartheta_1(v)}{\vartheta_4\vartheta_2(v)},\quad \mathrm{sd}u=\frac{\vartheta_3^2\vartheta_1(v)}{\vartheta_2\vartheta_4\vartheta_3(v)},$$

$$\mathrm{cd}u=\frac{\vartheta_3\vartheta_2(v)}{\vartheta_2\vartheta_3(v)} \tag{3.121}$$

其余六个雅各比-哥来舍尔函数只是上述六个函数的倒数，这里不再写出。

利用（3.95）式，也可以将该六个函数表示成σ的函数。由（3.119）式得

$$\operatorname{sn} u = c\,\frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)}$$

为了确定常数c，用u除上式并令$u\to 0$，得$c=1$。用规一化格阵（见§2.3.1），有$e_1-e_2=1$，$k^2=e_3-e_2$，$\omega_1=K$，$\omega_2=K'i$。故得

$$\operatorname{sn} u = \frac{\sigma(u)}{\sigma_3(u)} \tag{3.122}$$

由（3.95）式和（3.120）式立即得

$$\operatorname{cn} u = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_3(u)},\quad \operatorname{dn} u = \frac{\sigma_2(u)}{\sigma_3(u)} \tag{3.123}$$

进一步得

$$\operatorname{sc} u = \frac{\sigma(u)}{\sigma_1(u)},\quad \operatorname{sd} u = \frac{\sigma(u)}{\sigma_2(u)},\quad \operatorname{cd} u = \frac{\sigma_1(u)}{\sigma_2(u)} \tag{3.124}$$

椭圆函数$\operatorname{dn}^2 u$也可以表示成ϑ的函数。这个函数的周期为$(2K,\ 2K'i)$，极点为$K'i$，在极点处函数的主部为$-(u-K'i)^{-2}$。因为$u=0$是$\zeta(u)$的一阶极点，根据函数ζ的基本关系式（3.1）和（3.4）可以断定，$\zeta'(u-K'i)$与$\operatorname{dn}^2 u$有相同的主部和极点（参看（2.26）式，另外用ζ函数表示任意椭圆函数的普遍公式见§4.5），故有

$$\operatorname{dn}^2 u = \zeta'(u-K'i)+c_1 \tag{3.125}$$

c_1是常数。令$\omega_1=K$，$\omega_2=K'i$。将（3.109）式代入（3.125）式得

$$\operatorname{dn}^2 u = \frac{d^2}{du^2}\ln\vartheta_1\left(\frac{u-K'i}{2K}\right)+c \tag{3.126}$$

因为

$$\vartheta_4(v) = iq^{1/4}e^{-\pi vi}\vartheta_1\left(v-\frac{\tau}{2}\right)=\Theta(u)$$

所以得

$$\mathrm{dn}^2 u = \frac{d^2}{du^2}\ln\Theta(u) + c \tag{3.127}$$

这个关系式在研究雅各比函数 Eu 时是很有用的。

§3.7 雅各比函数 $Z(u)$

雅各比曾定义 $Z(u)$ 如下

$$Z(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} \qquad \Theta(u) = \vartheta_4(v), \quad u = 2\omega_1 v \tag{3.128}$$

这个函数与 $\zeta(u)$ 相似（见（3.12）式的第二式）。函数 $Z(u)$ 在以 $2K$ 及 $2K'i$ 为边的四边形内有一个一阶极点。其格阵生成元是 $2K$，$2K'i$。由下面分析可以看出它与 $E(u)$ 的关系，以及它具有周期 $2K$。

由（3.127）式知

$$\mathrm{dn}^2 u = \frac{d}{du^2}\ln\Theta(u) + C$$

对上式积分得

$$E(u) = \frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)} + Cu$$

令 $u = K$，因为 $\Theta(K) = \vartheta_4\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$，$\Theta'(K) = \frac{1}{2K}\vartheta_4'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$，以及 $E(K) = E$，故得

$$C = \frac{E}{K}$$

因而

$$E(u) = Z(u) + \frac{E}{K}u$$

$$Z(u) = E(u) - \frac{E}{K}u \tag{3.129}$$

这是 $Z(u)$ 与 $E(u)$ 间的基本关系式。

利用（3.33），（3.36）和（3.39）式，即

$$E(u+2K) = E(u) + 2E$$

$$E(u+2K'i) = E(u) + 2(K'-E')i$$

$$2\frac{K'E}{K}=\frac{\pi}{K}-2E'+2K'$$

由（3.129）式得

$$Z(u+2K)=E(u+2K)-\frac{E}{K}(u+2K)=Z(u) \tag{3.130A}$$

$$Z(u+2K'i)=E(u+2K'i)-\frac{E}{K}(u+2K'i)$$

$$=Z(u)-\frac{\pi}{K}i \tag{3.130B}$$

可见$Z(u)$具有周期$2K$。由于$E(K)=K$，在（3.129）式中令$u=K$，得

$$Z(K)=0 \tag{3.131}$$

还可以将$Z(u)$写作

$$Z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}=\frac{d}{du}\ln\vartheta_4\left(\frac{u}{2K}\right) \tag{3.132}$$

第四章　任意椭圆函数

§4.1 前　　言

本章研究将已知零点和极点的任意椭圆函数，表示成椭圆函数或拟椭圆函数的有理函数的形式。

大家知道，有理函数可以有如下的表示法

$$R(z)=C\frac{(Z-b_1)(Z-b_2)\cdots(Z-b_n)}{(Z-a_1)(Z-a_2)\cdots(Z-am)}$$

$$=C\frac{\prod\limits_{i=1}^{n}(Z-b_i)}{\prod\limits_{j=1}^{m}(Z-a_j)} \qquad (A)$$

这种表示法使人们对函数的零点和极点一目了然，即 b_1、b_2、… b_n 为零点，而 a_1、a_2、…a_m 为极点。有理函数的另一种表示法是

$$R(v)=P(Z)+\sum_i\sum_k\frac{A_k^{(i)}}{(Z-a_k)^i} \qquad (B)$$

式中第一部分 $P(Z)$ 是多项式，第二部分即负幂部分是函数在每一极点 a_k 处的主要部分。这种表示法常用于积分法中。

椭圆函数和拟椭圆函数是有极点和零点的函数，我们很自然地会想到，能否用其构成形如上述有理函数那样的任意椭圆函数？答案是肯定的。可以用 σ、ϑ、$\mathscr{P}$、ζ 函数来表示任意椭圆函数 $f(u)$。

设 α_i 和 β_i 是椭圆函数 $f(u)$ 的零点和极点，则存在下列各式：

$$f(u)=C_1\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma(u-\alpha_i)}{\sigma(u-\beta_i)} \tag{4.1}$$

$$f(u)=C_2\prod_{j=1}^{P}\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{u-\alpha_j}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{u-\beta_j}{2\omega}\right)} \tag{4.2}$$

$$f(u)=R_1(\wp u)+R_2(\wp u)\wp' u \tag{4.3}$$

$$R(\wp u)=\frac{\prod_{i=1}^{n}(\wp u-\wp\alpha_i)}{\prod_{i=1}^{k}(\wp u-\wp\beta_i)},$$

$$f(u)=C_3+\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{P}\frac{(-1)^{l-1}a_{il}}{(l-1)!}\zeta^{(l-1)}(u-\beta_i) \tag{4.4}$$

式中 $C_1C_2C_3$ 是复常数，a_{il} 为复数系数。

另外还可以用 ζ 函数构造出下列三阶椭圆函数

$$g_ju=\zeta u+\varepsilon\zeta\left(u-\frac{2}{3}\omega_j\right)+\varepsilon^2\zeta\left(u+\frac{2}{3}\omega_j\right)$$
$$+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,j\eta_j \tag{4.5}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

共有四个 g 函数。式中 $\varepsilon=\exp\left(\frac{2}{3}\pi i\right)$，$\omega_3=-\omega_1-\omega_2$，$\omega_4=\omega_1-\omega_2$，$\eta_j=\zeta(\omega_j)$。

以上（4.1)，(4.2)，(4.3）式形如（A）式，而（4.4）式形如（B）式，至于（4.5）式则是形如（B）式的一种特殊形式。下面分别研究之。

§4.2 任意椭圆函数用 σ 函数表示

设有 n 阶椭圆函数 $f(u)$，其双周期为 $2\omega, 2\omega'$（格阵 2Ω），在单位胞腔中有零点 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\alpha_n$ 与极点 β_1，β_2，…，β_n（k 阶零

点和极点算作 k 个)。由§1.3中椭圆函数基本性质(σ)知

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\sum_{i=1}^{n}\beta_i=2\Omega \tag{4.6}$$

$$2\Omega=2m\omega+2m'\omega'$$

今构造一个函数

$$\phi(u)=\frac{\sigma(u-\alpha_1-2\Omega)\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_n)} \tag{4.7}$$

因为 $u=0$ 是 σu 的一阶零点,可见上式与 $f(u)$ 有相同的零点和相同的极点。下面研究 $\phi(u)$ 的周期性。当 u 变成 $u+2\omega$ 时,由(3.21)式知(4.7)式的分子分母将分别乘以下列因子

$$(-1)^n e^{2\eta(nu+n\omega-\alpha_1-2\Omega-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)}$$

$$(-1)^n e^{2\eta(nu+n\omega-\beta_1-\beta_2-\cdots-\beta_n)}$$

由(4.6)式知,二个因子相同,可见 2ω 是 $\phi(u)$ 的周期。同理可以证明 $2\omega'$ 是 $\phi(u)$ 的另一个周期。因此 $\phi(u)$ 与 $f(u)$ 是二个有相同双周期、相同零点和极点的椭圆函数。关系式

$$\frac{f(u)}{\phi(u)}$$

是一个没有奇点的椭圆函数,由椭圆函数的性质知该比值等于常数 C,即

$$f(u)=C\frac{\sigma(u-\alpha_1-2\Omega)\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_n)} \tag{4.8}$$

由于 σ 函数的零点具有周期 ω,因此零点 α_i 和极点 β_i 不必一定选在一个单位胞腔内,可以任意选 n 个零点和 n 个极点,并使全部零点之和等于全部极点之和,满足这样条件的零极点总是等价的。据此可以令

$$\alpha_1'=\alpha_1-2\Omega$$

选择 m、m' 以使下列等式成立

$$\alpha_1'+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n$$

这时 $f(u)$ 的表示式是

$$f(u)=C\frac{\sigma(u-\alpha_1')\sigma(u-\alpha_2)\cdots\sigma(u-\alpha_n)}{\sigma(u-\beta_1)\sigma(u-\beta_2)\cdots\sigma(u-\beta_n)}$$

一般可写为

$$f(u)=C\prod_{i=1}^{n}\frac{\sigma(u-\alpha_i)}{\sigma(u-\beta_i)} \tag{4.9}$$

并有

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=\sum_{i=1}^{n}\beta_i \tag{4.10}$$

§4.3 任意椭圆函数用ϑ函数表示

已知零极点的任意椭圆函数，也可表示为ϑ函数的表示式以替代上述的σ函数的式子。

设n阶椭圆函数$f(u)$的周期为2ω、$2\omega'$，其零点α_i、极点$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$满足（4.10）式，该函数的σ函数表示式如（4.9）式。将ϑ与σ函数间的关系式

$$\sigma(u)=2\omega e^{\frac{\eta_1u^2}{2\omega}}\frac{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega}\right)}{\vartheta_1'(0)}$$

代入（4.9）式得

$$f(u)=ce^{\frac{\eta_1}{2\omega}\left\{\sum_{i=1}^{n}(u-\alpha i)^2-\sum_{i=1}^{n}(u-\beta_i)^2\right\}}\prod_{i=1}^{n}\frac{\vartheta_1\left(\frac{u-\alpha_i}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u-\beta_i}{2\omega}\right)}$$

观察该式的指数函数的因子

$$\sum_{i=1}^{n}(u-\alpha_i)^2-\sum_{i=1}^{n}(u-\beta_i)^2$$

其中全部 u^2 项彼此相消，而一次项由（4.10）式知也相消，仅剩下关于 α_i、β_i 的常数项可归并到系数 c 中去。因此得到用 ϑ 函数表示任意椭圆函数的式子，即

$$f(u)=c'\prod_{i=1}^{n}\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{u-\alpha_i}{2\omega}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{u-\beta_i}{2\omega}\right)} \tag{4.11}$$

§4.4 任意椭圆函数用$\wp$函数表示

用$\wp$函数表示任意椭圆函数时，应注意到$\wp$函数是偶函数。任意椭圆函数可能是偶函数，也可能是奇函数，或是一般的情形，每种情形所对应的$\wp$函数表示式是不同的，下面分别讨论之。

首先证明任意偶椭圆函数可以在相同格阵上表示为$\wp$函数的有理函数式。设函数 $f_1(u)$ 为偶椭圆函数($f_1(u)=f_1(-u)$)，选基本周期格阵点为$\omega+\omega'$，$\omega-\omega'$，$-\omega+\omega'$，$-\omega+\omega'$，在这些点构成的周期平行四边形内，极点和零点均是正负号成对出现的，即零点：$\pm\alpha_1$、$\pm\alpha_2$、$\cdots\pm\alpha_l$，极点：$\pm\beta_1$、$\pm\beta_2$、$\cdots\pm\beta_m$（k 阶零点或极点计作 k 个）。此外 $u=0$ 可能是零点或极点，要视 l 与 m 的值而定，函数 $f_1(u)$ 的阶数应等于 $2l$ 和$2m$ 中的最大值。若 $l>m$，则 $u=0$ 是 $2(l-m)$ 阶极点，反之则 $u=0$ 是 $2(m-l)$ 阶零点。

用$\wp$函数构造下列函数

$$F_1(u)=\frac{(\wp u-\wp\alpha_1)(\wp u-\wp\alpha_2)\cdots(\wp u-\wp\alpha_l)}{(\wp u-\wp\beta_1)(\wp u-\wp\beta_2)\cdots(\wp u-\wp\beta_m)}$$

显然这个函数与 $f_1(u)$ 在上述周期平行四边形内有相同的零点和极点（相同的阶数）。根据刘维尔定理知 $f_1(u)/F_1(u)$ 等于常数C，即

$$f_1(u)=C\frac{(\wp u-\wp\alpha\ )(\wp u-\wp\alpha_2)\cdots(\wp u-\wp\alpha_l)}{(\wp u-\wp\beta_1)(\wp u-\wp\beta_2)\cdots(\wp u-\wp\beta_m)} \tag{4.12}$$

应当指出，当零点或极点是半周期或者是周期时，其阶数只能是

偶数。为说明这一点，先假定偶函数有奇数阶零点，即设半周期 ω 为偶椭圆函数 $f_1(u)$ 的 $(2n+1)$ 阶零点，则 $f_1(u)$ 的 $(2n+1)$ 阶导函数在 $u=\omega$ 处将不等于零，有

$$f_1^{(2n+1)}(\omega)\neq 0$$

考虑到导函数的周期性得

$$f_1^{(2n+1)}(u+2\omega)=f_1^{(2n+1)}(u)$$

式中令 $u=-\omega$，则

$$f_1^{(2n+1)}(\omega)=f^{(2n+1)}(-\omega)$$

再考虑到 $f_1^{(2n+1)}(u)$ 为奇函数，即

$$f_1^{(2n-1)}(-\omega)=-f^{(2n+1)}(\omega)$$

将此式代入上式，并考虑到 ω 不是奇点而是零点，必有

$$f_1^{(2n+1)}(\omega)=0$$

这与前面的结论 $f_1^{(2n+1)}(u)\neq 0$ 相矛盾。故假定偶函数有奇数阶零点的假定不能成立，所以偶函数的半周期零点的阶数只能是偶数。对于极点，注意到 $f_1(u)$ 的极点是 $1/f_1(u)$ 的零点，故偶函数的半周期极点的阶数也只能是偶数。按同样的分析，可知奇椭圆函数的半周期零点或极点只能是奇数。

当零点 α_i 是半周期时，则 α_i 和 $-\alpha_i$ 均在上述周期平行四边形的边界上，且二者之差 $2\alpha_i$ 等于周期值。考虑到椭圆函数的基本周期域是单位胞腔，故 $\pm\alpha_i$ 二点只能计算一个。若零点 $\pm\alpha_i$ 的总阶数等于 $2P$，则（4.12）式中关于因子 α_i 的乘积只能出现 P 次。对于单位胞腔内的其他零点，则应计算正负零点的全部阶数。这个原则同样适用于半周期的极点。

其次研究奇椭圆函数 $f_2(u)$，设其零点为 $\pm\alpha'_1$、$\pm\alpha'_2$、… $\pm\alpha'_k$，极点为 $\pm\beta'_1$、$\pm\beta'_2$、… $\pm\beta'_m$。由于 $\mathscr{P}'u$ 是奇函数，而 $f_2(u)/\mathscr{P}'u$ 为偶函数，类似建立偶函数表示式（4.12）的过程，最后得到

$$f_2(u)=C'\frac{(\mathscr{P}u-\mathscr{P}\alpha'_1)(\mathscr{P}u-\mathscr{P}\alpha'_2)\cdots(\mathscr{P}u-\mathscr{P}\alpha'_k)}{(\mathscr{P}n-\mathscr{P}\beta'_1)(\mathscr{P}u-\mathscr{P}\beta'_2)\cdots(\mathscr{P}u-\mathscr{P}\beta'_m)}\mathscr{P}'u \tag{4.13}$$

在上述奇偶椭圆函数的基础上，再研究更一般的情况。对于任意椭圆函数 $f(u)$，显然 $f(u)+f(-u)$ 是一个偶函数，而 $f(u)-f(-u)$ 是一个奇函数，因此有

$$f(u)=\frac{1}{2}[f(u)+f(-u)]$$

$$+\frac{1}{2}[f(u)-f(-u)]=f_1(u)+f_2(u)$$

即 $f(u)$ 可以看成是偶函数和奇函数之和。已知 $f_1(u)$ 是偶函数，又知函数

$$\frac{f(u)-f(-u)}{\wp' u}$$

也是偶函数。运用（4.12）式可得

$$\frac{1}{2}[f(u)+f(-u)]=R_1(\wp u),$$

$$\frac{\frac{1}{2}[f(u)-f(-u)]}{\wp' u}=R_2(\wp u)$$

这里 $R_1(\wp)$ 和 $R_2(\wp)$ 为 $\wp$ 的有理函数。因此可将任意椭圆函数表示为

$$f_1(u)=R_1(\wp u)+R_2(\wp u)\wp' u \tag{4.14}$$

利用关系式 $[\wp' u]^2=4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3$，由（4.14）式得

$$[f(u)-R_1(\wp u)]^2=R_2^2(\wp u)[4\wp^3 u-g_2\wp u-g_3] \tag{4.15}$$

这是任意椭圆函数 $f(u)$ 的二次方程式，其系数是 $\wp u$ 的有理函数。

由（4.14）式可以得到椭圆函数的若干一般性质。一个很重要的性质是：

任意二个椭圆函数，若有相同的格阵（相同的周期），则该二函数满足一代数方程式。

设 $f(u)$ 及 $g(u)$ 是上述的二个椭圆函数，由（4.14）式得

$$f(u)=R_1(\wp u)+R_2(\wp u)\wp' u$$
$$g(u)=R_3(\wp u)+R_4(\wp u)\wp' u$$

再利用$[\wp' u]^2=4\wp u-g_2\wp u-g_3$。由这三个方程式中可以约去$\wp u$及$\wp' u$。因此得到

$$F[f(u),\ g(u)]=0 \tag{4.16}$$

式中F是f及g的多项式。一个例子是取$g(u)=f'(u)$，则得到任意椭圆函数所满足的微分方程式

$$F[f(u),\ f'(u)]=0 \tag{4.17}$$

这里F可f和f'的多项式。

§4.5　任意椭圆函数用ζ函数表示

在给定函数极点的情况下，可以由ζ函数构造出任意椭圆函数。

首先考察下列函数

$$f(u)=\sum_{i=1}^{n} a_i\zeta(u-\beta_i) \tag{4.18}$$

满足条件

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=0 \tag{4.19}$$

式中a_1、a_2、$\cdots a_n$及β_1、β_2、$\cdots\beta_n$是常数。因为$u=0$是ζu的一阶极点，所以$\beta_i(i=1,\ 2,\ \cdots n)$是$f(u)$的极点。很易证明$f(u)$具有双周期$2\omega$，$2\omega'$，因为

$$f(u+2\omega)=\sum_{i=1}^{n} a_i\zeta(u-\beta_i+2\omega)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\zeta(u-\beta_i)+\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot 2\eta=f(u)$$

同理得

$$f(u+2\omega')=f(u)$$

$f(u)$ 在 β_i 点具有一阶极点，其留数为 a_i，条件（4.19）式表示全部留数之和等于零，由椭圆函数的基本性质知 $f(u)$ 是一个 n 阶椭圆函数，其周期为 2ω，$2\omega'$。

其次研究用 ζ 函数及其导函数来表示任意椭圆函数。假定椭圆函数 $f(u)$ 的极点 β_i 有 k 个，β_i 的阶数为 m_i，$n=\sum_{i=1}^{k} m_i$。在极点附近函数的主要部分为

$$\frac{a_{i1}}{u-\beta_i}+\frac{a_{i2}}{(u-\beta_i)^2}+\cdots+\frac{a_{im_i}}{(u-\beta_i)^{m_i}}$$

由（3.3）式可以看出 ζ 函数每求一次导数，其表示式的负幂数增加1，因此下列函数 $\phi(u)$ 在 β_i 点与 $f(u)$ 有相同的极点和相同的主部

$$\phi(u)=\sum_{i=1}^{k}\left\{a_{i1}\zeta(u-\beta_i)-a_{i2}\zeta'(u-\beta_i)\right.$$
$$\left.+\cdots+(-1)^{m_i-1}\frac{a_{im_i}}{(m_i-1)!}\zeta^{(m_i-1)}(u-\beta_i)\right\}$$

又因为

$$\phi(u+2\omega)=2\eta\sum_{i=1}^{k}a_{i1}+\phi(u)$$

$$\phi(u+2\omega')=2\eta'\sum_{i=1}^{k}a_{i1}+\phi(u)$$

式中 $\sum_{i=1}^{k}a_{i1}$ 是 $f(u)$ 在单位胞腔上的留数之和，应等于零。可见 $\phi(u)$ 具有周期 2ω、$2\omega'$，因此它是椭圆函数。而函数

$$f(u)-\phi(u)$$

应是无奇点的椭圆函数，由椭圆函数的性质知应等于常数 c，从而得到

$$f(u)=c+\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_i}\frac{(-1)^{l-1}a_{il}}{(l-1)!}\zeta^{(l-1)}(u-\beta_i)$$

(4.20)

该式称作 $f(u)$ 的部分展开式。

§4.6 三阶椭圆函数$g_j u$

用ζ函数可以定义下列四个三阶椭圆函数

$$g_j u=\zeta u+\varepsilon\zeta\left(u-\frac{2}{3}\omega_j\right)+\varepsilon^2\zeta\left(u+\frac{2}{3}\omega_j\right)+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,i\eta_j \tag{4.21}$$

$$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

$$\varepsilon=e^{\frac{2}{3}\pi i},\quad \eta_j=\zeta(\omega_j)$$

$$\omega_3=-\omega_1-\omega_2,\quad \omega_4=\omega_1-\omega_2$$

此式与（4.18）式有相似的形式。在给定周期格阵 2Ω（生成元 ω_1、ω_2）的情况下，该式的最后一项是个常数项，而头三项是ζ函数项。因为函数项的系数之和等于零，由（4.18）式知 $g_j u$ 是三阶椭圆函数，其三个一阶级点分别是 $u=0,\pm\frac{2}{3}\omega_j$，其周期是 $2\omega_1$、$2\omega_2$。

这四个函数通常既非偶函数，也非奇函数。

利用ζ函数的齐次性，可以得到 $g_j u$ 的齐次性，即

$$g_j(mu|2m\Omega)=m^{-1}g_j(u|2\Omega) \tag{4.22}$$

应用下关系式

$$\zeta\left(u+\frac{4}{3}\omega_j\right)=\zeta\left(u+2\omega_j-\frac{2}{3}\omega_j\right)$$

$$=\zeta\left(u+\frac{2}{3}\omega_j\right)+2\eta_j$$

可知 $g_j u$ 满足下列等式

$$g_j\left(u+\frac{2}{3}\omega_j\right)-\varepsilon g_j u=\left[2\varepsilon^2+\frac{2}{3}(1-\varepsilon)\sqrt{3}\,i\right]\eta_j$$
$$=0 \tag{4.23}$$

还可以定义四个有关的常数

$$c_j=\zeta\left(\frac{2}{3}\omega_j\right)-\frac{2}{3}\eta_j$$
$$=\frac{1}{3}\left[2\zeta\left(\frac{2}{3}\omega_j\right)-\zeta\left(\frac{4}{3}\omega_j\right)\right] \tag{4.24}$$
$$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

由 ζ 函数的齐次性得

$$c_j(2m\Omega)=m^{-1}c_j(2\Omega),\quad m\neq 0 \tag{4.25}$$

当 $u=\frac{2}{3}\omega_j$ $(j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 时，可以用 c_j 表示 $g_j u$ 值。由于

$$\varepsilon=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}\,i),\quad \varepsilon^2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}\,i)$$

$$\eta_2-\varepsilon\eta_4-\varepsilon^2\eta_3=\eta_2+\frac{1}{2}(\eta_4+\eta_3)-\frac{1}{2}\sqrt{3}\,i\,(\eta_4-\eta_3)$$
$$=-\sqrt{3}\,i\,\eta_1$$

所以得

$$g_1\left(\frac{2}{3}\omega_2\right)=\zeta\left(\frac{2}{3}\omega_2\right)-\varepsilon\zeta\left(\frac{2}{3}\omega_4\right)-\varepsilon^2\zeta\left(\frac{2}{3}\omega_3\right)$$
$$+\frac{2}{3}\sqrt{3}\,i\,\eta_1=c_2-\varepsilon c_4-\varepsilon^2 c_3$$

用类似的过程得

$$\left.\begin{array}{ll}
g_1\left(\frac{2}{3}\omega_2\right)=c_2-\varepsilon^2 c_3-\varepsilon c_4 & g_1\left(-\frac{2}{3}\omega_2\right)=-c_2+\varepsilon c_3+\varepsilon^2 c_4 \\
g_2\left(\frac{2}{3}\omega_1\right)=c_1-\varepsilon^2 c_3+\varepsilon c_4 & g_2\left(-\frac{2}{3}\omega_1\right)=-c_1+\varepsilon c_3-\varepsilon^2 c_4 \\
g_3\left(\frac{2}{3}\omega_4\right)=-\varepsilon c_1+\varepsilon^2 c_2+c_4 & g_3\left(-\frac{2}{3}\omega_4\right)=\varepsilon^2 c_1-\varepsilon c_2-c_4 \\
g_4\left(\frac{2}{3}\omega_3\right)=\varepsilon^2 c_1+\varepsilon c_2+c_3 & g_4\left(-\frac{2}{3}\omega_3\right)=-\varepsilon c_1-\varepsilon^2 c_2-c_3
\end{array}\right\} \tag{4.26}$$

现在来研究格阵Ω呈三角形的情况。设三角形格阵的生成元ω_1、ω_2及ω_3比例于1的三次根，即$\omega_1:\omega_2:\omega_3=1:\varepsilon:\varepsilon^2$。不难看出，格阵$\varepsilon\Omega$与生成元为$\omega_2$、$\omega_3$的格阵是相同的。同时考虑(3.11)式和(4.25)式得

$$c_1=\zeta^*\left(\frac{2}{3}\omega_1|2\Omega\right)$$

$$c_2=\zeta^*\left(\frac{2}{3}\varepsilon\omega_1|2\varepsilon\Omega\right)=\frac{1}{\varepsilon}\zeta^*\left(\frac{2}{3}\omega_1|2\Omega\right)=\varepsilon^2c_1$$

$$c_3=\zeta^*\left(\frac{2}{3}\omega_1|2\varepsilon^2\Omega\right)=\frac{1}{\varepsilon^2}\zeta^*\left(\frac{2}{3}\omega_1|2\Omega\right)=\varepsilon c_1$$

这里运用了ζ^*u的齐次性。因此对这种格阵有

$$\varepsilon^2c_1+\varepsilon c_2+c_3=0 \tag{4.27}$$

根据格阵生成元的非唯一性（见§1.4），将生成元变更为ω_2，$-\omega_1$，则c_1、c_2、c_3、c_4应变更为c_2、$-c_1$、c_4、$-c_3$，因此得

$$\varepsilon^2c_2-\varepsilon c_1+c_4=0 \tag{4.28}$$

由(4.27)式和(4.28)式依次消去c_1和c_2得

$$c_2-\varepsilon c_3-\varepsilon^2c_4=0 \tag{4.29}$$

$$-c_1+\varepsilon^2c_3-\varepsilon c_4=0 \tag{4.30}$$

(4.27)～(4.30)式中，任意三个是线性无关的。

由此可得到四个函数在$u=\pm\frac{2}{3}w_j$点上的值：

$u=$	$\frac{2}{3}\omega_1$	$-\frac{2}{3}\omega_1$	$\frac{2}{3}\omega_2$	$-\frac{2}{3}\omega_2$	→①
$g_1u=$	∞	∞	b_1	0	→②
$g_2u=$	0	b_2	∞	∞	→③
$g_3u=$	εb_3	0	0	ε^2b_3	→④
$g_4u=$	ε^2b_4	0	εb_4	0	→⑤

→①	$\frac{2}{3}\omega_3$	$-\frac{2}{3}\omega_3$	$\frac{2}{3}\omega_4$	$-\frac{2}{3}\omega_4$
→②	0	εb_1	0	ε^2b_1
→③	ε^2b_2	0	0	εb_2
→④	∞	∞	0	b_3
→⑤	b_4	0	∞	∞

(4.31)

式中 $b_1=c_2-\varepsilon^2 b_3-b_4$，将此式减去(4.29)式得 $b_1=\sqrt{3}\ i\,(c_3-c_4)$，由此类推得

$$b_1=\sqrt{3}\ i\,(c_3-c_4),\quad \varepsilon b_1=\sqrt{3}\ i\,(c_2+c_4),$$
$$b_2=\sqrt{3}\ i\,(c_3+c_4),\quad \varepsilon b_2=-\sqrt{3}\ i\,(c_1+c_2),$$
$$b_3=-\sqrt{3}\ i\,(c_1+c_2),\quad \varepsilon b_3=\sqrt{3}\ i\,(c_2-c_4),$$
$$b_4=\sqrt{3}\ i\,(c_2-c_1),\quad \varepsilon b_4=\sqrt{3}\ i\,(c_1-c_3),$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon^2 b_1&=-\sqrt{3}\ i\,(c_2+c_3)\\ \varepsilon^2 b_2&=\sqrt{3}\ i\,(c_1-c_4)\\ \varepsilon^2 b_3&=\sqrt{3}\ i\,(c_1+c_4)\\ \varepsilon^2 b_4&=\sqrt{3}\ i\,(c_3-c_2)\end{aligned}\right\}\tag{4.32}$$

可以看到在单位胞腔上函数的零点和极点的分布。每个函数除式中列出的二个极点外，另一个极点是 $u=0$。由(4.31)式，各函数按 $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 的顺序依次(从左到右)出现极点、零点，以及 b_j、εb_j、$\varepsilon^2 b_j$ 的值。

三阶椭圆函数 g_j 有一重要性质，即 $g_j u$ 和 $g_j(-u)$ 满足下列三次恒等式

$$g_j^3 u+g_j^3(-u)-6\,m_j b_j g_j u g_j(-u)-b_j^3=0 \tag{4.33}$$

式中 $m_j=\sqrt{3}\ i\ c_j/b_j$。该式的证明可参阅 Patrick Du Val: "Elliptic Functions and Elliptic Curves (Cambridge, 1973)。后面将要利用这个恒等式证明该函数的加法公式。

第五章　椭圆函数的加法公式

§5.1　前　　言

我们已研究了单变量u的椭圆函数$f(u)$。现在要进一步研究二个变量$u \pm v$的椭圆函数$f(u \pm v)$，找出它与$f(u)$及$f(v)$间的关系。这种关系式通常称作椭圆函数的加法公式（或加法定理）。有了加法公式，令$u=v$时又可得到倍加公式$f(2u)$，按递推原理可以得到任意变量$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n$椭圆函数的加法公式。

关于初等函数的加法公式是屡见不鲜的。例如三角函数

$$\sin(u \pm v)=\sin u \cos v \pm \cos u \sin v$$

$$\cos(u \pm v)=\cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

$$\mathrm{tg}(u \pm v)=\frac{\mathrm{tg}\, u \pm \mathrm{tg}\, v}{1 \mp \mathrm{tg}\, u\, \mathrm{tg}\, v}$$

对于双曲函数

$$\mathrm{sh}(u \pm v)=\mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, v \pm \mathrm{ch}\, u\, \mathrm{sh}\, v$$

$$\mathrm{ch}(u \pm v)=\mathrm{ch}\, u\, \mathrm{ch}\, v \pm \mathrm{sh}\, u\, \mathrm{sh}\, v$$

$$\mathrm{th}(u \pm v)=\frac{\mathrm{th}\, u \pm \mathrm{th}\, v}{1 \pm \mathrm{th}\, u\, \mathrm{th}\, v}$$

椭圆函数有类似的加法公式，例如雅各比函数有如下加法公式

$$\mathrm{sn}(u+v)=\frac{\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, v\, \mathrm{dn}\, v+\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{sn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v} \tag{5.1}$$

$$\mathrm{cn}(u+v)=\frac{\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{cn}\, v-\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{dn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v} \tag{5.2}$$

$$\mathrm{dn}(u+v)=\frac{\mathrm{dn}\, u\, \mathrm{dn}\, v-k^2\mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}\, v}{1-k^2\mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v} \tag{5.3}$$

在特殊条件下，这些加法公式可蜕变为上述初等函数的加法公

式。当 $k=0$，$\mathrm{sn}u=\sin u$，$\mathrm{cn}u=\cos u$，$\mathrm{dn}u=1$，则(5.1)、(5.2)式变为三角函数加法公式$\sin(u+v)$及$\cos(u+v)$。由于$k=0$，$\mathrm{dn}\,u\equiv 1$，因此没有和它相当的三角函数。若 $k=1$，$\mathrm{sn}\,u=\mathrm{th}\,u$，$\mathrm{cn}\,u=\mathrm{dn}\,u=\mathrm{sech}\,u$，则 (5.1) 式蜕变成双曲函数 $\mathrm{th}(u+v)$

$$\mathrm{th}(u+v)=\frac{\mathrm{th}\,u\,\mathrm{sech}^2 v+\mathrm{sech}^2 u\,\mathrm{th}\,v}{1-\mathrm{th}^2 u\,\mathrm{th}^2 v}$$

$$=\frac{\mathrm{th}\,u+\mathrm{th}\,v}{1+\mathrm{th}\,u\,\mathrm{th}\,v}$$

而(5.2)、(5.3)式则蜕变为 $\mathrm{sech}(u+v)$ 或 $\mathrm{ch}(u+v)$。

椭圆函数的加法公式被认为是最核心和最基本的理论问题之一。1761年欧拉 (Euler) 第一个证明了椭圆函数存在加法定理，后来随着椭圆函数的发展，相继出现了各种函数的加法公式及不同的证明方法。

关于加法公式主要包括二个方面的内容：一是椭圆函数加法公式的存在性问题，二是如何求得加法公式。第一个问题是很易证明的，在§4.4 中曾得到任意椭圆函数的普遍关系式 (4.16)

$$F[f(u),\ g(u)]=0$$

f、g 为任意二个具有相同周期的椭圆函数，F 是 f 及 g 的多项式。令 $g(u)=f(u+v)$，则得

$$F[f(u),\ f(u+v)]=0 \tag{5.4}$$

这表明每一椭圆函数具有代数加法公式。

至于第二个问题，即如何求得椭圆函数的加法公式，正是本章后面各节的主要内容。有许多方法可以用来求得加法公式，概括地讲主要有下列三种方法：

数学分析法：对椭圆函数及其有关微分方程式进行代数法运算，并结合函数的特性进行分析，得出加法公式。

间接函数法：利用其他函数的加法公式或有关公式进行分析运算，得出所求函数的加法公式。

几何法：这种方法最初是由雅各比提出的，在研究摆运动的

同时，解释其几何性质，从而得到形如（5.3）式的加法公式。

研究不同的分析方法有利于从不同角度对函数的基本性质及运算有所了解。由于第三种方法比较冗长，这里主要介绍前二种方法。至于第三种方法可在Greenhill："The Application of elliptic function (London 1893)"中查到。

§5.2 卫尔斯特拉斯函数的加法公式

下面用不同方法得出同一函数或不同函数的加法公式 $f(u+v)$，f 是 $\wp$、ζ 或 σ 中的任一个。

（1）数学分析法

可以利用包括导函数 $\wp'$ 在内的关于 $\wp$ 函数的代数方程式来建立 $\wp$ 函数的加法公式。研究下列函数

$$f(z)=\wp' z-A\wp z-B \tag{5.5}$$

式中 A、B 为任意常数。这是三阶椭圆函数，$z=0$ 为三阶极点。选择常数 A 和 B，使得在 $z=u$ 和 v 是函数 f 的零点，即 $f(u)=f(v)=0$。显然 $z=-u-v$ 也是 f 的零点，因为由§1.3中（5）知，椭圆函数的极点之和与零点之和的差等于函数的周期，而现在极点之和等于0。由此可以得到

$$\left.\begin{aligned}&\wp' u-A\wp u-B=0\\&\wp' v-A\wp v-B=0\\&\wp'(u+v)+A\wp(u+v)+B=0\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

进一步得到

$$A=\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v},\quad B=\frac{\wp u\wp' v-\wp v\wp' u}{\wp u-\wp v} \tag{5.7}$$

由（5.5）式可以得到 $(\wp' z)^2$ 的表示式，另一方面 $\wp$ 函数的微分方程 $(\wp' z)^2=4\wp^3 z-g_2\wp z-g_3$，因此得

$$[f(z)+A\wp z+B]^2=4\wp^3 z-g_2\wp z-g_3$$

令 $f(z)=0$，$t=\wp z$，则得 t 的三次方程式

$$4t^3-A^2t^2-(2AB+g_2)t-(B^2+g_3)=0 \tag{5.8}$$

使 $f(z)=0$ 的函数 $\wp$ 是该方程的解。即该方程的三个根是 $t=$

$\wp u$、$\wp v$、$\wp(u+v)$。这三个根的和应等于$A^2/4$

$$\wp u+\wp v+\wp(u+v)=\frac{A^2}{4}$$

将（5.7）式中的A代入，即得$\wp$函数的加法公式

$$\wp(u+v)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right]^2-\wp u-\wp v \qquad (5.9)$$

令$\omega=-u-v$，由于$\wp$是偶函数，$\wp'$是奇函数，得

$$u+v+w=0$$

$$\wp\omega=\wp(v+u) \qquad \wp'\omega=-\wp'(v+u)$$

$$\wp u=\wp(v+\omega) \qquad \wp' u=-\wp'(v+\omega)$$

$$\wp v=\wp(\omega+u) \qquad \wp' v=-\wp(\omega+u)$$

分别将$\wp(v+u)$、$\wp(u+\omega)$、$\wp(\omega+v)$按（5.9）式展开，则得

$$\wp u+\wp v+\wp\omega=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp' v-\wp'\omega}{\wp v-\wp\omega}\right]^2=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'\omega-\wp' u}{\wp\omega-\wp u}\right]$$

因此

$$\frac{\wp' v-\wp'\omega}{\wp v-\wp\omega}=\frac{\wp'\omega-\wp' u}{\wp\omega-\wp u}=\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}$$

或

$$(\wp v-\wp\omega)\wp' u+(\wp\omega-\wp u)\wp' v+(\wp u-\wp v)\wp'\omega=0$$

可表示为

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp u & \wp' u \\ 1 & \wp v & \wp' v \\ 1 & \wp\omega & \wp'\omega \end{vmatrix}=0 \qquad (5.10)$$

这是$\wp$函数加法公式的又一形式。此外，利用（5.6）式约去常数A、B，亦可得到该式。

在（5.9）式中令$u=v$，则得$\wp$函数的倍加公式

$$\wp(2u)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'' u}{\wp' u}\right]^2-2\wp u \qquad (5.11)$$

将$\wp$函数的微分方程 及 $\wp''u=6\wp^2u-\frac{1}{2}g_2$ 代入，得

$$\wp(2u)=\frac{t^4+\frac{1}{2}g_2t^2+2g_3t+\frac{1}{16}g_2^2}{4t^3-g_2t-g_3} \tag{5.12}$$

式中 $t=\wp u$。可见$\wp(2u)$ 不仅是一个代数式（5.11），而且是$\wp u$的有理函数。

重复使用加法和倍加公式，则可得到$\wp(nu)$ 关于$\wp u$的有理函数式，这里 n 是任意正整数。

（2）、间接函数法

也可由 σ 和 ζ 函数的关系式得到$\wp$的加法公式，在运算过程中同时得到 σ 和 ζ 函数的加法公式。

研究二段椭圆函数

$$\wp u-\wp v$$

式中 v 是常量。函数的二极点是 $u=0$，而且 $u=\pm v$ 分别是函数的一阶极点。因此可按（4:9）式将$\wp u-\wp v$展开，其中

$$\alpha_1=v,\ \alpha_2=-v,\ \beta_1=\beta_2=0$$

从而得

$$\wp u-\wp v=C\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 v}$$

为了确定常数C，用 $\sigma^2 u$ 乘二边，并令 $u\to 0$，得

$$1=-C\sigma^2 u$$

将C代入上式

$$\wp u-\wp v=-\frac{\sigma(u-v)\sigma(u+v)}{\sigma^2 u\sigma^2 v} \tag{5.13}$$

这是 σ 函数的加法公式。

对上式二边求对数的导数，并用 $\zeta u=\sigma' u/\sigma u$，则得

$$\frac{\wp' u}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)+\zeta(u-v)-2\zeta u \tag{5.14A}$$

将该式中的 u 与 v 交换得

$$-\frac{\wp' v}{\wp u-\wp v}=\zeta(u+v)-\zeta(u-v)-2\zeta v \qquad (5.14B)$$

上两方程相加得

$$\zeta(u+v)=\frac{1}{2}\ \frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}+\zeta u+\zeta v \qquad (5.15)$$

这是ζ函数的加法公式

也可以由(5.15)式得到$\wp$的加法公式。为此先对u求导数，并用$\zeta' u=-\wp u$，得

$$-\wp(u+v)=\frac{1}{2}\frac{\wp'' u(\wp u-\wp v)-\wp' u(\wp' u-\wp' v)}{(\wp u-\wp v)^2}$$

$$-\wp u$$

再对v求导数得

$$-\wp(u+v)=$$

$$-\frac{1}{2}\ \frac{\wp'' v(\wp u-\wp v)-\wp' v(\wp' u-\wp' v)}{(\wp u-\wp v)^2}-\wp v$$

将这二等式相加得

$$-2\wp(u+v)=\frac{1}{2}\ \frac{\wp'' u-\wp'' v}{\wp u-\wp v}$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\wp' u-\wp' v}{\wp u-\wp v}\right]^2-\wp u-\wp v \qquad (5.16)$$

再用 $\wp'' u=6\wp^2 u-\frac{1}{2}g_2$，得

$$\wp'' u-\wp'' v=6(\wp^2 u-\wp^2 v)$$

代入（5.16）式，即得（5.9）式

至此我们已得到函数$\wp$、ζ、σ的加法公式。应当指出，(5.9)式是$\wp$函数的代数加法公式，因为$\wp' u$、$\wp' v$各是$\wp u$、$\wp v$的代数函数，可将其看作是普遍代数加法公式（5.4）的一个实例。而（5.15）式不是ζ函数的代数加法公式，因为$\wp$及其导函数不是ζ的代数式。可将（5.15）式看作是拟加法公式，（5.12）式亦相类似。这与ζ、σ均属于拟椭圆函数是一致的。

建立了加法公式，则可以很方便地得出一些重要结果。例如可求得$\wp$函数自变量增加半个周期后的值。为此在（5.9）式中

令 $v=\omega_1$，由$e_i=\mathscr{P}\omega_i$（$i=1, 2, 3$）及（2.9）式得

$$\mathscr{P}(u+\omega_1)+\mathscr{P}u+e_1=\frac{1}{4}\frac{(\mathscr{P}'u)^2}{(\mathscr{P}u-e_1)^2}$$

$$=\frac{(\mathscr{P}u-e_2)(\mathscr{P}u-e_3)}{\mathscr{P}u-e_1}=\mathscr{P}u-e_1+2e_1-e_2-e_3$$

$$+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\mathscr{P}u-e_1}$$

考虑到（2.10）式得

$$\mathscr{P}(u+\omega_1)=e_1+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\mathscr{P}u-e_1} \tag{5.17}$$

一般的公式为

$$\mathscr{P}(u\pm\omega_k)=e_k+\frac{(e_k-e_i)(e_k-e_j)}{\mathscr{P}u-e_k} \tag{5.18}$$

i、j、k是1、2、3的一定排列。

在（5.13）式中令 $v=\omega_1$，用下式

$$\sigma(u+\omega_k)=\sigma(u-\omega_k+2\omega_k)=-e^{2\eta_k u}\sigma(u-\omega_k)$$

和（3.20）式得

$$\mathscr{P}u-e_k=-\frac{\sigma(u+\omega_k)\sigma(u-\omega_k)}{\sigma^2 u\sigma^2\omega_k}$$

$$=e^{2\eta_k u}\left[\frac{\sigma(u-\omega_k)}{\sigma u\sigma\omega_k}\right]^2=\left[\frac{\sigma_k(u)}{\sigma u}\right]^2$$

$$k=1, 2, 3 \tag{5.19}$$

取根式（按习惯只取一种正负号）得

$$\sqrt{\mathscr{P}u-e_k}=\frac{\sigma_k(u)}{\sigma u} \tag{5.20}$$

在（5.18）、（5.19）式中令 $u=-\omega_1/2$ 得

$$\mathscr{P}\left(\frac{\omega_k}{2}\right)-e_k=\pm\sqrt{(e_k-e_i)(e_k-e_j)}=\frac{e^{\eta_k\omega_k}}{\sigma^2\omega_k} \tag{5.21}$$

这是$\mathscr{P}$函数在四分之一周期上的值。

§5.3 雅各比二阶椭圆函数的加法公式

现在研究雅各比-哥来舍尔十二种椭圆函数的加法公式，特别是对常用的sn、cn、dn函数用不同的方法进行证明。

(1)、数学分析法

先从曾被欧拉证明的下列微分方程式入手

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0 \tag{5.22}$$

$$X=ax^4+4bx^3+6cx^2+4dx+e$$
$$Y=ay^4+4by^3+6cy^2+4dy+e$$

式中 a、b、c、d、e 均是常数。为了得到这个微分方程，考察下式

$$S=\frac{1}{4}\left[\frac{\sqrt{X}-\sqrt{Y}}{x-y}\right]^2-\frac{1}{4}a(x+y)^2$$
$$-b(x+y)-c$$

或 $$S=\frac{F(x,\ y)-\sqrt{X}\sqrt{Y}}{2(x-y)^2}$$

式中

$$F(x,\ y)=ax^2y^2+2bxy(x+y)+c(x^2+4xy+y^2)$$
$$+2d(x+y)+e$$

这是对 x、y 呈对称的双二次函数式。

将 S 看作二个独立变量 x、y 的函数，分别求导数

$$\sqrt{X}\frac{\partial S}{\partial x}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\sqrt{X}-\frac{1}{4}\frac{dX}{dx}\sqrt{Y}}{(x-y)^2}$$

$$-\frac{F\sqrt{X}-X\sqrt{Y}}{(x-y)^3}=-\frac{Y_1x+Y_2}{(x-y)^3}$$

$$+\frac{X_1y+X_2}{(x-y)^3}\sqrt{Y}$$

类似可求得 $\sqrt{Y}\frac{\partial S}{\partial y}$ 具有相同的表示式。假如取 S 为常数，那么有

$$\frac{\partial S}{\partial x}dx+\frac{\partial S}{\partial y}dy=0$$

立即得（5.22）式。当四次多项式X、Y中$a=k^2$，$c=-(1+k^2)/6$，$e=1$，$b=d=0$时，得

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}+\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}=0 \tag{5.23}$$

这个方程有超越积分，令

$$\left.\begin{aligned} u&=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\\ v&=\int_0^y\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}}\end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

则（5.23）式的解为

$$u+v=c \tag{5.25}$$

c是常数。另一方面由（5.24）式得

$$\frac{dx}{du}=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

$$\frac{dy}{dv}=\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

由（5.25）式得

$$\frac{dy}{du}=-\frac{dy}{dv}=-\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}$$

对上式平方

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2=(1-x^2)(1-k^2x^2),$$

$$\left(\frac{dy}{dv}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2) \tag{5.26}$$

再微分上二式

$$\frac{d^2x}{du^2}=x(2k^2x^2-1-k^2),$$

$$\frac{d^2y}{du^2}=y\,(2k^2y^2-1-k^2)$$

由此得

$$y\frac{d^2x}{du^2}-x\frac{d^2y}{du^2}=2k^2xy(x^2-y^2) \qquad (5.27\text{A})$$

再由 (5.26) 式得

$$y^2\left(\frac{dx}{du}\right)^2-x^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(y^2-x^2)(1-k^2x^2y^2) \qquad (5.27\text{B})$$

将 (5.27) 两式相除

$$\frac{y\dfrac{d^2x}{du^2}-x\dfrac{d^2y}{du^2}}{y\dfrac{dx}{du}-x\dfrac{dy}{du}}=-\frac{2k^2xy\left(y\dfrac{dx}{du}+x\dfrac{dy}{du}\right)}{1-k^2x^2y^2}$$

二边取积分

$$\ln\left(y\frac{dx}{du}-x\frac{dy}{du}\right)=\ln(1-k^2x^2y^2)+c'$$

由此得

$$\frac{y\dfrac{dx}{du}-x\dfrac{dy}{du}}{1-k^2x^2y^2}=C_1 \qquad (5.28)$$

根据 (5.24) 式得

$$x=\text{sn}\,u,\quad y=\text{sn}\,v$$

$$\frac{dx}{du}=\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u,\quad \frac{dy}{du}=-\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u$$

代入 (5.28) 式得

$$\frac{\text{sn}\,u\,\text{cn}\,v\,\text{dn}\,v+\text{sn}\,v\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{1-k^2\text{sn}^2u\,\text{sn}^2v}=C_1 \qquad (5.29)$$

因为 (5.29) 式是 (5.25) 式的推论，故 C_1 是 C 的函数

$$C_1=f(C)=f(u+v)$$

将 (5.29) 式右方换成 $f(u+v)$，并令 $v=0$，有

$$\text{sn}\,u=f(u)$$

这表明

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^{2} \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{sn}^{2} v} \quad (5.30)$$

这是函数 sn 的加法公式

由 (5.30) 式的分母

$$D=1-k^{2} \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{sn}^{2} v=\operatorname{cn}^{2} u+\operatorname{sn}^{2} u \operatorname{dn}^{2} v$$
$$=\operatorname{cn}^{2} v+\operatorname{sn}^{2} v \operatorname{dn}^{2} u$$

可以得到

$$\operatorname{cn}^{2}(u+v)=1-\operatorname{sn}^{2}(u+v)$$
$$=\frac{D^{2}-(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)^{2}}{D^{2}}$$

分子中

$$D^{2}=(\operatorname{cn}^{2} u+\operatorname{sn}^{2} u \operatorname{dn}^{2} v)(\operatorname{cn}^{2} v+\operatorname{sn}^{2} v \operatorname{dn}^{2} u)$$

经化简后得

$$\operatorname{cn}(u+v)=\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1-k^{2} \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{sn}^{2} v} \quad (5.31)$$

这是 cn 的加法公式。同理得

$$D=\operatorname{dn}^{2} u+k^{2} \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{cn}^{2} v=\operatorname{dn}^{2} v+k^{2} \operatorname{sn}^{2} v \operatorname{cn}^{2} u$$

经类似的过程得 dn 的加法公式

$$\operatorname{dn}(u+v)=\frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v-k^{2} \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1-k^{2} \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{sn}^{2} v} \quad (5.32)$$

现在用另一种方法证明 (5.30) 式，令

$$f=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{D}$$

对 u 求偏导数得

$$D^{2} \frac{\partial f}{\partial u}=D[\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v(\operatorname{dn}^{2} u$$
$$+k^{2} \operatorname{cn}^{2} u)]+2 k^{2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn}^{2} v$$
$$\cdot(\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u)$$
$$=\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v(1+k^{2} \operatorname{sn}^{2} u \operatorname{sn}^{2} v)$$
$$-\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v(\operatorname{dn}^{2} u \operatorname{dn}^{2} v+k^{2} \operatorname{cn}^{2} u \operatorname{cn}^{2} v)$$

由此可见 $\partial f/\partial u$ 关于 u 和 v 是对称的，$\partial f/\partial u$ 有相同的式子。因此满足偏微分方程

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial v}$$

因而

$$f=f(u+v)$$

将这代入 (5.33) 式，令 $v=0$，从而得 (5.30) 式。

最后用建立关于雅各比函数的代数方程组来证明加法定理。设 u 为变量，v 为任意常数，研究下列三个函数

$$f_1(u)=\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+v)$$
$$f_2(u)=\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+v)$$
$$f_3(u)=\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}(u+v)$$

不难证明这三个函数的周期都是$2K$、$2iK'$。事实上，函数$\mathrm{sn}\,u$、$\mathrm{sn}(u+v)$的极点是 f_1 的单极点。因为 sn 的极点出现在$2mK+(2n+1)iK'$上，除了 $u=iK'$或$-v+iK'$是 f_1 的极点外，与该点相距$2mK+2niK'$的点均是函数的极点。因此在以 0、$2K$、$2iK'$、$2(K+iK')$为顶点的基本周期平行四边形（更严格地讲是单位胞腔）上，这种极点当然只有二个。对于 f_2 和 f_3 亦有相同的结论。这说明 f_1、f_2、f_3 均是以$2K$、$2iK'$为周期的二阶椭圆函数，它们在单位胞腔上各有二个单极点，其中一个是 iK'。现在用 f_1、f_2、f_3 构造下列二个函数

$$\phi_1(u)=f_2(u)+A_1f_1(u),\quad \phi_2(u)=f_3(u)+A_2f_1(u) \tag{5.33}$$

适当选取常数 A_1 和 A_2 使 $u=iK'$不是 ϕ_1、ϕ_2 的极点，因此 ϕ_1和 ϕ_2 在单位胞腔内只有一个一阶极点。由椭圆函数的基本性质知，二者必须等于常数 B_1、B_2，故得

$$\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+v)+A_1\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+v)=B_1$$
$$(5.34)$$
$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}(u+v)+A_2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+v)=B_2$$

A_1、A_2、A_3、A_4 对变量 u 是常数，但都决定于 v 的选择。令$u=0$得

$$B_1=\mathrm{cn}\,v,\quad B_2=\mathrm{dn}\,v$$

将 (5.34) 式对 u 求导数，再令 $u=0$，由 (2.43) 式及 $\mathrm{cn}(0)=\mathrm{dn}(0)=1$，得

$$(\mathrm{cn}\,v)'+A_1\mathrm{sn}\,v=0$$

$$(\mathrm{dn}\,v)'+A_2\mathrm{sn}\,v=0$$

再用 (2.43) 式得

$$A_1=\mathrm{dn}\,v,\quad A_2=k^2\mathrm{cn}\,v$$

将四个常数代入 (5.34) 式得

$$\begin{aligned}&\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}(u+v)+\mathrm{dn}\,v\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+v)=\mathrm{cn}\,v\\&\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}(u+v)+k^2\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}(u+v)=\mathrm{dn}\,v\end{aligned}\tag{5.35}$$

把 u 和 v 分别换成 $-u$ 和 $v+u$，得

$$\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{dn}(u+v)\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v=\mathrm{cn}(u+v)$$

$$\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{dn}\,v-k^2\mathrm{cn}(u+v)\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v=\mathrm{dn}(u+v)$$

由这二式可求得 $\mathrm{cn}(u+v)$ 和 $\mathrm{dn}(u+v)$，代入 (5.35) 式的第一式又得到 $\mathrm{sn}(u+v)$。

(2)、间接函数法

利用第二章的根函数 $f_i(i=1,2,3)$ 和 $\mathscr{P}$ 函数的加法公式，可求得十二种雅各比-哥来舍尔函数的加法公式。

由 (2.38) 式及 (5.9) 式得

$$\begin{aligned}f_i^2(u+v)&=\mathscr{P}(u+v)-e_i\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{\mathscr{P}'u-\mathscr{P}'v}{\mathscr{P}u-\mathscr{P}v}\right]^2-(\mathscr{P}u+\mathscr{P}v+e_i)\end{aligned}\tag{5.36}$$

因为

$$e_j+e_k=-e_i$$

$$\mathscr{P}u-\mathscr{P}v=f_i^2(u)-f_i^2(v)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{P}'u-\mathscr{P}'v=2\,[&-f_i(u)f_j(u)f_k(u)\\&+f_i(v)f_j(v)f_k(v)]\end{aligned}$$

$$(\mathscr{P}u-\mathscr{P}v)(\mathscr{P}u+\mathscr{P}v+e_i)=(\mathscr{P}u-e_j)(\mathscr{P}u-e_k)$$
$$-(\mathscr{P}v-e_j)(\mathscr{P}v-e_k)$$
$$=f_j^2(u)f_k^2(u)-f_j^2(v)f_k^2(v)$$

将上列各式代入 (5.36) 式得

$$f_j^2(u+v)=\frac{[f_i(u)f_j(u)f_k(u)-f_i(v)f_j(v)f_k(v)]^2-[f_i^2(u)-f_i^2(v)][f_j^2(u)f_k^2(u)-f_j^2(u)f_k^2(v)]}{[f_j^2(u)-f_i^2(v)]^2}$$

利用下列恒等式

$$(ac-bd)^2-(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ad-bc)^2$$

若令 $a=f_i(u)$, $b=f_i(v)$, $c=f_j(u)f_k(u)$, $d=f_j(v)f_k(v)$, 则上式简化为:

$$f_i(u+v)=\frac{f_i(u)f_j(v)f_k(v)-f_i(v)f_j(u)f_k(u)}{f_i^2(v)-f_i^2(u)} \tag{5.37}$$

对规一化格阵，令 $i=1, 2, 3$，则立即得到 $\mathrm{cs}(u+v)$, $\mathrm{ns}(u+v)$, $\mathrm{ds}(u+v)$。因为

$$\mathscr{P}v-\mathscr{P}u=\mathrm{cs}^2 v-\mathrm{cs}^2 u=\mathrm{ns}^2 v-\mathrm{ns}^2 u=\mathrm{ds}^2 v-\mathrm{ds}^2 u$$

由 (5.37) 式得到下列比例式

$$\begin{aligned}
&1:\mathrm{cs}(u+v):\mathrm{ns}(u+v):\mathrm{ds}(u+v)\\
&=\mathrm{ns}^2 v-\mathrm{ns}^2 u:\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,v\,\mathrm{ds}\,v-\mathrm{cs}\,v\,\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,u\\
&\quad:\mathrm{cs}\,v\,\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,v-\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,v\,\mathrm{ds}\,u\\
&\quad:\mathrm{cs}\,v\,\mathrm{ns}\,v\,\mathrm{ds}\,u-\mathrm{cs}\,u\,\mathrm{ns}\,u\,\mathrm{ds}\,v。
\end{aligned} \tag{5.38}$$

若用 $\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{sn}^2 v$ 乘等式右方各项，则可用三个经典的雅各比函数 sn、cn、dn 表示。而等式左方可以分别乘以 $\mathrm{sc}(u+v)$、$\mathrm{sn}(u+v)$、$\mathrm{sd}(u+v)$，则得

$$\begin{aligned}
&1:\mathrm{cs}(u+v):\mathrm{ns}(u+v):\mathrm{ds}(u+v)\\
&=\mathrm{sc}(u+v):1:\mathrm{nc}(u+v):\mathrm{dc}(u+v)\\
&=\mathrm{sn}(u+v):\mathrm{cn}(u+v):1:\mathrm{dn}(u+v)\\
&=\mathrm{sd}(u+v):\mathrm{cd}(u+v):\mathrm{nd}(u+v):1\\
&=s_1^2-s_2^2:s_1c_1d_2-s_2c_2d_1:s_1c_2d_2-s_2c_1d_1:s_1c_2d_1-s_2c_1d_2
\end{aligned} \tag{5.39}$$

式中 s_1、c_1、d_1 表示 sn u 、cn u 、dn u ，s_2、c_2、d_2 表示 sn v 、cn v 、dn v 。至此已得出十二种函数的一种加法公式，但对 sn、cn、dn 不是经典形式(5.30)～(5.32) 式（当然二者是等效的）。实际上每个函数均有多种表达式，为此考察下列矩阵

$$\begin{bmatrix} s_1^2-s_2^2 & s_1c_1d_2+s_2c_2d_1 & s_1c_2d_2+s_2c_1d_1 & s_1c_2d_1+s_2c_1d_2 \\ s_1c_1d_2-s_2c_2d_1 & c_1^2c_2^2-k'^2s_1^2s_2^2 & c_1c_2-s_1s_2d_1d_2 & c_1c_2d_1d_2-k'^2s_1s_2 \\ s_1c_2d_2-s_2c_1d_1 & c_1c_2+s_1s_2d_1d_2 & 1-k^2s_1^2s_2^2 & d_1d_2+k^2s_1s_2c_1c_2 \\ s_1c_2d_1-s_2c_1d_2 & c_1c_2d_1d_2+k'^2s_1s_2 & d_1d_2-k^2s_1s_2c_1c_2 & d_1^2d_2^2+k^2k'^2s_1^2s_2^2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{ss} & A_{sc} & A_{sn} & A_{sd} \\ A_{cs} & A_{cc} & A_{cn} & A_{cd} \\ A_{ns} & A_{nc} & A_{nn} & A_{nd} \\ A_{ds} & A_{dc} & A_{dn} & A_{dd} \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

可以证明这个矩阵的秩是 1 。实际上，任意阶数等于或大于 2 的子式均等于 0 ，例如

$$\begin{aligned} A_{sc}A_{cs} &= s_1^2(1-s_1^2)(1-k^2s_2^2)-s_2^2(1-s_2^2)(1-k^2s_1^2) \\ &= (1-s_1^2)[(1-s_1^2)(1-s_2^2)-k'^2s_1^2s_2^2] \\ &= A_{ss}A_{cc} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{sc}A_{ns} &= C_1C_2(s_1^2d_2^2-s_2^2d_1^2)-s_1s_2d_1d_2(c_1^2-c_2^2) \\ &= C_1C_2(s_1^2-s_2^2)+s_1s_2d_1d_2(s_1^2-s_2^2) \\ &= A_{ss}A_{nc} \end{aligned}$$

故矩阵的四个列矢量间存在线性关系（第一个列矢量元素是 (5.39) 式最后一行中的元素)。利用这个性质以及 (5.39) 式的头四行的比例式，可将十二个函数表示成四个列矢量的任一个。令 p 、q 为 s 、c 、n 、d 中的任意二个，则得

$$pq(u+v)=\frac{A_{ps}}{A_{qs}}=\frac{A_{pr}}{A_{qr}}, \quad r=s, n, c, d \tag{5.41}$$

当 v 改变符号时，六个函数中仅 s_2 改变符号，但 c_2、d_2保持不变（因为是 v 的偶函数)。观察上列矩阵，当s_2 由十变一时，使 $A_{pq}\to A_{qp}$。由此得到

$$pq(u-v)=\frac{A_{rp}}{A_{rq}} \tag{5.42}$$

进一步有

$$\left.\begin{aligned}
&pq(u+v)p'q'(u-v) \\
&\quad=\frac{A_{pp'}}{A_{qp'}}\ \frac{A_{qp'}}{A_{qq'}}=\frac{A_{pp'}}{A_{qq'}} \qquad p'\neq p,\ q'\neq q \\
&pq(u+v)pq(u-v)=\frac{A_{pp}}{A_{qq}} \\
&pq(u+v)+pq(u-v)=\frac{A_{pq}+A_{qp}}{A_{qq}}
\end{aligned}\right\} \tag{5.43}$$

由 (5.41)、(5.42) 式得

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u\pm v)&=\frac{s_1^2-s_2^2}{s_1c_2d_2\mp s_2c_1d_1}=\frac{s_1c_1d_2\pm s_2c_2d_1}{c_1c_2\pm s_1s_2d_1d_2} \\
&=\frac{s_1c_2d_2\pm s_2c_1d_1}{1-k^2s_1^2s_2^2}=\frac{s_1c_2d_1\pm s_2c_1d_2}{d_1d_2\pm k^2s_1s_2c_1c_2} \\
\mathrm{cn}(u\pm v)&=\frac{s_1c_1d_2\mp s_2c_2d_1}{s_1c_2d_2\mp s_2c_1d_1}=\frac{c_1^2c_2^2-(k')^2s_1^2s_2^2}{c_1c_2\pm s_1s_2d_1d_2} \\
&=\frac{c_1c_2\mp s_1s_2d_1d_2}{1-k^2s_1^2s_2^2}=\frac{c_1c_2d_1d_2\mp (k')^2s_1s_2}{d_1d_2\pm k^2s_1c_1s_2c_2} \\
\mathrm{dn}(u\pm v)&=\frac{s_1c_2d_1\mp s_2c_1d_2}{s_1c_2d_2\mp s_2c_1d_1}=\frac{c_1c_2d_1d_2\pm (k')^2s_1s_2}{c_1c_2\pm s_1s_2d_1d_2} \\
&=\frac{d_1d_2\mp k^2s_1s_2c_1c_2}{1-k^2s_1^2s_2^2}=\frac{d_1^2d_2^2+k^2(k')^2s_1^2s_2^2}{d_1d_2\pm k^2s_1s_2c_1c_2} \\
\mathrm{sc}(u\pm v)&=\frac{s_1^2-s_2^2}{s_1c_1d_2\mp s_2c_2d_1}=\frac{s_1c_1d_2\pm s_2c_2d_1}{c_1^2c_2^2-(k')^2s_1^2s_2^2} \\
&=\frac{s_1c_2d_2\pm s_2c_1d_1}{c_1c_2\mp s_1s_2d_1d_2}=\frac{s_1c_2d_1\pm s_2c_1d_2}{c_1c_2d_1d_2\mp (k')^2s_1s_2} \\
\mathrm{sd}(u\pm v)&=\frac{s_1^2-s_2^2}{s_1c_2d_1\mp s_2c_1d_2}=\frac{s_1c_1d_2\pm s_2c_2d_1}{c_1c_2d_1d_2\pm (k')^2s_1s_2} \\
&=\frac{s_1c_2d_2\pm s_2c_1d_1}{d_1d_2\mp k^2s_1s_2c_1c_2}=\frac{s_1c_2d_1\pm s_2c_1d_2}{d_1^2d_2^2+k^2(k')^2s_1^2s_2^2} \\
\mathrm{cd}(u\pm v)&=\frac{s_1c_1d_2\mp s_2c_2d_1}{s_1c_2d_1\mp s_2c_1d_2}=\frac{c_1^2c_2^2-(k')^2s_1^2s_2^2}{c_1c_2d_1d_2\pm (k')^2s_1s_2} \\
&=\frac{c_1c_2\mp s_1s_2d_1d_2}{d_1d_2\mp k^2s_1s_2c_1c_2}=\frac{c_1c_2d_1d_2\mp (k')^2s_1s_2}{d_1^2d_2^2+k^2(k')^2s_1^2s_2^2}
\end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

sn、cn、dn 中的第三式是经典的形式。至于另外六个函数，仅分别是上述函数的倒数。

还可以得到，例如

$$
\left.\begin{aligned}
1+\mathrm{sn}(u+v)\mathrm{sn}(u-v)&=\frac{c_2^2+s_1^2d_2^2}{1-k^2s_1^2s_2^2}\\
1+\mathrm{cn}(u+v)\mathrm{cn}(u-v)&=\frac{c_1^2+c_2^2}{1-k^2s_1^2s_2^2}\\
[1\pm\mathrm{sn}(u+v)][1\pm\mathrm{sn}(u-v)]&=\frac{(c_2\pm s_1d_2)^2}{1-k^2s_1^2s_2^2}\\
[1\pm\mathrm{sn}(u+v)][1\mp\mathrm{sn}(u-v)]&=\frac{(c_1\pm s_2d_1)^2}{1-k^2s_1^2s_2^2}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.45}
$$

最后，令 $u=v$ 由（5.44）式得到各函数的倍加公式，用 s、c、d 表示 $\mathrm{sn}\,u$、$\mathrm{cn}\,u$、$\mathrm{dn}\,u$

$$
\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sn}(2u)=\frac{2scd}{1-k^2s^4},\quad \mathrm{cn}(2u)=\frac{c^2-s^2d^2}{1-k^2s^4}\\
&\mathrm{dn}(2u)=\frac{d^2-k^2s^2c^2}{1-k^2s^4},\quad \mathrm{sd}(2u)=\frac{2scd}{d^2-k^2s^2c^2}\\
&\mathrm{sc}(2u)=\frac{2scd}{c^2-s^2d^2},\quad \mathrm{cd}(2u)=\frac{c^2-s^2d^2}{d^2-k^2s^2c^2}
\end{aligned}\right\}
\tag{5.46}
$$

§5.4 雅各比拟椭圆函数的加法公式

雅各比 Z 和 E 函数具有下列拟加法公式

$$
Z(u+v)=Z(u)+Z(v)-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)
\tag{5.47}
$$

$$
E(u+v)=E(u)+E(v)-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)
\tag{5.48}
$$

先证明第一个公式。设 u 是变量，v 是常量，考察函数

$$
-k^2\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)
$$

这是二阶椭圆函数（格阵为 $2\Omega^*$），周期是 $2K$、$2iK'$。在以 $2K$、$2iK'$ 为边的单位胞腔内具有二个一阶极点 $u=iK$，$u=-v+$

iK'，所对应的留数各为-1和1。由§3.7中关于Z函数的性质可知下式成立

$$-k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{sn}(u+v) = Z(u+v) - Z(u) + c$$

为了决定常数c，令$u=0$得

$$c = -Z(v)$$

代入前式，即得（5.47）式。

再研究函数

$$1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v$$

根据其零点和极点，可用西他函数表示如下

$$1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v = \vartheta_4^2 \frac{\vartheta_4(u+v)\vartheta_4(u-v)}{\vartheta_4^2(u)\vartheta_4^2(v)}$$

二边取对数，再对u求导数，并用（3.128）式得

$$Z(u+v) + Z(u-v) - 2Z(u)$$
$$= -\frac{2k^2 \mathrm{sn}^2 v\, \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{1 - k^2 \mathrm{sn}^2 u\, \mathrm{sn}^2 v} \tag{5.49}$$

这是加法公式的部分分式展开式。

对于（5.48）式，可将其改写成

$$E(u) + E(v) - E(u+v) = k^2 \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{sn}(u+v)$$

注意u是变量，v是常量。对二边求导数，用（3.29）式和$(\mathrm{sn}\, u)' = \mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u$得

$$\mathrm{dn}^2 u - \mathrm{dn}^2(u+v) = k^2[\mathrm{cn}\, u\, \mathrm{dn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{sn}(u+v)$$
$$+ \mathrm{sn}\, u\, \mathrm{sn}\, v\, \mathrm{cn}(u+v)\, \mathrm{dn}(u+v)]$$

令$u=0$，$\mathrm{sn}(0)=1$，$\mathrm{cn}(0)=\mathrm{dn}(0)=1$，等式二边均等于$k^2 \mathrm{sn}^2 v$。因此（5.48）式是成立的。另外也可用类似证明$Z(u+v)$的过程得到$E(u+v)$。

§5.5 西他函数的加法公式

研究下列函数

$$f(v) = \frac{a\vartheta_1^2(v) + b\vartheta_3^2(v)}{\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w)}$$

由§3.4.4的分析可知，在适当选取常数 a，b 时，这是一个最多只有一个极点的椭圆函数，因此必然等于一个常数。由于 a、b 还可乘一任意常数，因此可使 $f(v)=1$，从而

$$a\vartheta_1^2(v)+b\vartheta_3^2(v)=\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w)$$

由（3.73）式知，四个 ϑ 函数的零点依次是0、1/2、$(1+\tau)/2$、$\tau/2$，考虑到（3.68），（3.74）式，得

$$v=0,\quad b=\frac{\vartheta_3^2(w)}{\vartheta_3^2}$$

$$v=\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\quad a=\frac{\vartheta_1^2(w)}{\vartheta_3^2}$$

将 a、b 代入前式，得到关于 ϑ_3 的加法公式

$$\vartheta_3^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w)=\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)+\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w) \tag{5.50A}$$

若将 v 和 w 分别换成 $v+\frac{1}{2}$ 和 $w+\frac{1}{2}$，得

$$\vartheta_3^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w)=\vartheta_2^2(w)\vartheta_2^2(\omega)+\vartheta_4^2(v)\vartheta_4^2(w) \tag{5.50B}$$

可见对同一 ϑ_3 存在二种表示式。将上式 v 换成 $v+\frac{1}{2}$，然后再将 v 和 w 换成 $v+\frac{1}{2}$ 和 $w+\frac{1}{2}$，得到关于 ϑ_4 的二种形式加法公式如下

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2\vartheta_4(v+w)\vartheta_4(v-w)&=\vartheta_1^2(v)\vartheta_2^2(w)+\vartheta_3^2(v)\vartheta_4^2(w)\\&=\vartheta_2^2(v)\vartheta_1^2(w)+\vartheta_4^2(v)\vartheta_3^2(w)\end{aligned} \tag{5.51}$$

一般每一个 $\vartheta_?^2\vartheta_k(v+w)\vartheta_k(v-w)$ 都有二种表示式，以此类推可以得出

$$\begin{aligned}\vartheta_3^2\vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w)&=\vartheta_1^2(v)\vartheta_3^2(w)-\vartheta_3^2(v)\vartheta_1^2(w)\\&=\vartheta_4^2(v)\vartheta_2^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_4^2(w)\end{aligned} \tag{5.52}$$

$$\vartheta_4^2\vartheta_2^2(v+w)\vartheta_2(v-w)=\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(w)-\vartheta_4^2(v)\vartheta_1^2(w)$$
$$=\vartheta_3^2(v)\vartheta_2^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2(w)$$
(5.53)

$$\vartheta_4^2\vartheta_1(v+w)\vartheta_1(v-w)=\vartheta_1^2(v)\vartheta_4^2(w)-\vartheta_4^2(v)\vartheta_1^2(w)$$
$$=\vartheta_3^2(v)\vartheta_2^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(w)$$
(5.54)

$$\vartheta_4^2\vartheta_2(v+w)\vartheta_2(v-w)=\vartheta_2^2(v)\vartheta_4^2(w)-\vartheta_3^2(v)\vartheta_1^2(w)$$
$$=\vartheta_4^2(v)\vartheta_2^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_3^2(w)$$
(5.55)

$$\vartheta_4^2\vartheta_3(v+w)\vartheta_3(v-w)=\vartheta_3^2(v)\vartheta_4^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_1^2(w)$$
$$=\vartheta_4^2(v)\vartheta_3^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_2^2(w)$$
(5.56)

$$\vartheta_4^2\vartheta_4(v+w)\vartheta_4(v-w)=\vartheta_4^2(v)\vartheta_4^2(w)-\vartheta_1^2(v)\vartheta_1^2(w)$$
$$=\vartheta_3^2(v)\vartheta_3^2(w)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_2^2(w)$$
(5.57)

还可以得到一些类似的公式。

同样可以证明：

$$\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_1(v+w)\vartheta_4(v-w)=\vartheta_1(v)\vartheta_4(v)\vartheta_2(w)\vartheta_3(w)$$
$$+\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_1(w)\vartheta_4(w)$$
(5.58)

$$\vartheta_2\vartheta_4\vartheta_1(v+w)\vartheta_3(v-w)=\vartheta_1(v)\vartheta_3(v)\vartheta_2(w)\vartheta_4(w)$$
$$+\vartheta_2(v)\vartheta_4(v)\vartheta_1(w)\vartheta_3(w)$$
(5.59)

$$\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_1(v+w)\vartheta_2(v-w)=\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(w)\vartheta_4(w)$$
$$+\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)\vartheta_1(w)\vartheta_2(w)$$
(5.60)

上述各式中令 $u=w$，得倍加公式（右方 等 于 0 的 式 子除外）

$$
\left.
\begin{array}{l}
\vartheta_3^3\vartheta_3(2v)=\vartheta_1^4(v)+\vartheta_3^4(v) \\
\vartheta_3^2\vartheta_4\vartheta_4(2v)=\vartheta_1^2(v)\vartheta_2^2(v)+\vartheta_3^2(v)\vartheta_4^2(v) \\
\vartheta_3^2\vartheta_2\vartheta_2(2v)=\vartheta_2^2(v)\vartheta_3^2(v)-\vartheta_4^2(v)\vartheta_1^2(v) \\
\vartheta_4^2\vartheta_2\vartheta_2(2v)=\vartheta_2^2(v)\vartheta_4^2(v)-\vartheta_3^2(v)\vartheta_1^2(v) \\
\vartheta_4^2\vartheta_2\vartheta_3(2v)=\vartheta_2^2(v)\vartheta_4^2(v)-\vartheta_2^2(v)\vartheta_1^2(v) \\
\vartheta_4^3\vartheta_4(2v)=\vartheta_4^4(v)-\vartheta_1^4(v) \\
\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4\vartheta_1(2v)=2\vartheta_1(v)\vartheta_2(v)\vartheta_3(v)\vartheta_4(v)
\end{array}
\right\}
\quad (5.61)
$$

§5.6　三阶椭圆函数$g_j u$的加法公式

研究由 $g_j u$ 和 $g_j(-u)$ 构成的下列三阶椭圆函数：

$$f(u)=Ag_j u+Bg_j(-u)+Cb_j,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{5.62}$$

A、B、C 为常数，函数的周期格阵为 2Ω，在 $u=0$，$\pm\frac{2}{3}\omega_j$（其中 $\omega_3=-\omega_1-\omega_2$，$\omega_4=\omega_1-\omega_2$）点为简单极点。设 $u=v$；$u=\omega$ 是 $f(u)$ 的二个零点，则 $u=-v-\omega$ 也是一个零点（因为极点之和等于零）。可将这些零点上函数 g_j 的值表示如下

$$\begin{cases} g_j v=b_j x_1 \\ g_j(-v)=b_j y_1 \end{cases}\qquad \begin{cases} g_j w=b_j x_2 \\ g_j(-w)=b_j y_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_j(-v-w)=b_j x_3 \\ g_j(v+w)=b_j y_3 \end{cases}$$

这些函数值也必须满足三次恒等式(4.33)。因此 $(x_i,\ k_i)$ $(k=1,\ 2)$ 必须同时满足下面二个方程式

$$
\begin{gathered}
AX+BY+C=0 \\
x^3+y^3-6m_j xy-1=0
\end{gathered}
\tag{5.63}
$$

消去 x 后得到关于 y 的三次方程式

$$(A^2-B^2)y^3+2B(2m_jA^2-BC)y^2+3C(2m_jA^2-BC)y-(A^3+C^3)=0$$

方程的三个根是 y_1，y_2，y_3。由中间二项得

$$\frac{3B(2m_jA^2-BC)}{A^2-B^2}=-(y_1+y_2+y_3)$$

$$\frac{3C(2m_jA^2-BC)}{A^2-B^2}=y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3$$

由此可求出

$$y_3=-\frac{By_1y_2+C(y_1+y_2)}{By_1y_2+C} \tag{5.64}$$

设$w\neq v$，此时$x_1\neq x_1$，$y_1\neq y_2$，由下式

$$Ax_1+By_1+C=0$$

$$Ax_2+By_2+C=0$$

得到比例式

$$A:B:C=y_1-y_2:x_2-x_1:x_1y_2-x_2y_1$$

将B/C代入（5.64）式得

$$y_3=\frac{x_1y_2^2-x_2y_1^2}{x_1y_1-x_2y_2}$$

故加法公式

$$g_j(v+w)=\frac{g_jvg_j^2(-w)-g_jwg_j^2(-v)}{g_jvg_j(-v)-g_jwg_j(-w)} \tag{5.65}$$

若$v=w$，则这个公式不能成立，需另求答案。由（4.33）式得

$$g_j^2ug'_ju+g_j^2(-u)g'_j(-n)-2m_jb_j[g'_jug_j(-u)$$
$$+g'_j(-u)g_j(u)]=0$$

令$u=v$得

$$(2m_jy_1-x_1^2)g'_jv+(2m_jx_1-y_1^2)g'_j(-v)=0$$

假设$f'(v)=Ag'_jv+Bg'_j(-v)=0$。与上式比较可以得到A和B，再代入（5.63）式第一式，同时用第二式可以得到C。由此可见，若满足下式

$$A:B:C=2m_jy_1-x_1^2:2m_jx_1-y_1^2:2m_jx_1y_1+1$$

则得$f(v)=f'(v)=0$。因此$u=v$是函数f的二阶零点，而另一个零点是$u=-2v$。因为$6m_jx_1y_1=x_1^3+y_1^3-1$，代入上式得

$$\frac{B}{C}=\frac{x_1^3-2y_1^3-1}{(x_1^3+y_1^3+2)y_1}$$

将该式代入（5.64）式，并 $y_1=y_2$，得

$$y_3=\frac{(x_1^3+1)y_1}{y_1^3-x_1^3}$$

故倍加公式为

$$g_j(2v)=\frac{(g_j^3v+1)g_j(-v)}{g_j^3(-v)-g_j^3v} \tag{5.66}$$

第六章　椭圆积分

§6.1　前　　言

椭圆积分与椭圆函数间有着很紧密的关系，在前面章节中讨论椭圆函数时，已多次涉及到椭圆积分的问题。

在第一章中引出了椭圆积分的定义，给出卫尔斯特拉斯和勒让德的三种标准椭圆积分的形式，并通过第一种椭圆积分的反演得到二阶椭圆函数 $\mathscr{P}u$ 和 $\mathrm{sn}u$。

在第二章中讨论了勒让德第一种椭圆积分及全椭圆积分 K。在§2.3.1中还讨论了将勒让德第一种椭圆积分转换为卫尔斯特拉斯第一种椭圆积分的问题。

在§3.3中讨论了勒让德第二种椭圆积分及由此而引出的拟椭圆函数 Eu，此外还讨论了第二种全椭圆积分 E。

因此，我们对椭圆积分已有了个初步的了解。但椭圆积分的问题远不仅限于这几个方面。本章将要较全面而概略地研究椭圆积分中若干主要问题。这些问题包括：

将普遍椭圆积分化简成三个基本椭圆积分；

椭圆积分中多项式的变换；

三种标准椭圆积分；

全椭圆积分的微分方程；

椭圆积分的若干计算和超椭圆积分的化简问题等。

若 $R(x,\ y)$ 是 x, y 的有理函数，$y^2=P(x)$，如果 $P(x)$ 是三次或四次多项式，则下列积分

$$\int R(x,\ y)dx \tag{6.1}$$

称为椭圆积分。椭圆积分一般不能用初等函数表示，但也有例外情况。如下列积分

$$\int \frac{x^{2n+1}dx}{\sqrt{x^4+bx^2+c}}$$

式中 n 为整数。令 $t=x^2$，则可化为下形积分

$$\frac{1}{2}\int \frac{t^n dt}{\sqrt{t^2+bt+c}}$$

这个积分是可以用初等函数表示的。因此若 $P(x)$ 为三次或四次多项式，而（6.1）式可以用初第函数表示的，则称之为假椭圆积分。至于 $P(x)$ 超过四次，则称之为超椭圆积分，在§6.7中将予以研究。

§6.2 化一般椭圆积分为基本形式

可以将一般椭圆积分转换为几个基本椭圆积分的线性组合。椭圆积分（6.1）中的 $R(x, y)$ 通常可以表示为

$$R(x, y)=R_1(x)+\frac{R_2(x)}{y} \tag{6.2}$$

$$y^2=P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e \tag{6.3}$$

式中 $R_1(x)$、$R_2(x)$ 为 x 的有理函数。积分 $\int R_1(x)\,dx$ 可用初等函数表示，而 $\int [R_2(x)/y]dx$ 是椭圆积分，$R_2(x)$ 可以表示为

$$R_2(x)=\sum_{k=0}^{p} c_k x^k+\sum_{m=1}^{q}\sum_{n=1}^{r}\frac{b_{mn}}{(x-a_m)^n} \tag{6.4}$$

式中 C_k、b_{mn}、a_m 为常数。因此可将一般椭圆积分化为下列二种积分

$$I_k=\int \frac{x^k}{y}\,dx \tag{6.5}$$

$$J_m=\int \frac{dx}{(x-c)^m y} \tag{6.6}$$

首先研究 $P(x)$ 为三次多项式时，如何将 I_m、J_k 表示成三

个基本椭圆积分 I_0、I_1、J_1。令

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

求下列微分

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\sqrt{P(x)}\right)=kx^{k-1}\sqrt{P(x)}+\frac{x^k}{2}\frac{3ax^2+2bx+c}{\sqrt{P(x)}}$$

$$=\frac{kx^{k-1}(ax^3+bx^2+cx+d)}{\sqrt{P(x)}}+\frac{x^k(3ax^2+2bx+c)}{2\sqrt{P(x)}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{P(x)}}\left[a\left(k+\frac{3}{2}\right)x^{k+2}+b(k+1)x^{k+1}\right.$$

$$\left.+c\left(k+\frac{1}{2}\right)x^k+dkx^{k-1}\right]$$

求积分，利用（6.5）式的符号，得

$$a\left(k+\frac{3}{2}\right)I_{k+2}+b(k+1)I_{k+1}$$

$$+c\left(k+\frac{1}{2}\right)I_k+dkI_{k-1}=x^k\sqrt{P(x)} \qquad (6.7)$$

这是关于 k 的递推式。令 $k=0$，1，3，依次得

$$\frac{3}{2}aI_2+bI_1+\frac{1}{2}cI_0=\sqrt{P(x)}$$

$$\frac{5}{2}aI_3+2bI_2+\frac{3}{2}cI_1+dI_0=x\sqrt{P(x)}$$

$$\frac{7}{2}aI_4+3bI_3+\frac{5}{2}cI_2+2dI_1=x^2\sqrt{P(x)}$$

可见 I_2、I_3、I_4 均可用 I_0、I_1 表示，其余可以类推，即（6.5）式中 k 为任意正整数的积分均可用 I_0、I_1 表示。

对于积分（6.6）式。用变量置换法，令 $t=x-c$，则得

$$J_m=\int\frac{t^m}{\sqrt{P_1(t)}}dt \qquad (6.8)$$

$$m=-1,\ -2,\ \cdots$$

这里 $P_1(t)$ 是三次多项式。积分 J_{-m} 与 I_k 相似，其递推式仍

是 (6.7) 式。在 (6.7) 式中令 $k=-1,-2$，依次得

$$\frac{1}{2}a'J_1-\frac{1}{2}c'J_{-1}-d'J_{-2}=t^{-1}\sqrt{P_1(t)}$$

$$-\frac{1}{2}a'J_0-b'J_{-1}-\frac{3}{2}c'J_{-2}-2d'J_{-3}=t^{-2}\sqrt{P_1(t)}$$

其余类推。式中 a'、b'、c'、d' 是多项式 $P_1(t)$ 的系数。可见积分 J_m 均可用 J_1、J_0、J_{-1} 三个来表示，即

$$J_{-1}=\int\frac{(x-c)}{\sqrt{P(x)}}dx,\quad J_0=\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}},$$

$$J_1=\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{P(x)}}$$

显然 $J_0=I_0$，$J_{-1}=I_1-cI_0$。总之，当 $P(x)$ 为三次多项式时，所有椭圆积分均可用基本椭圆积分 I_0、I_1、J_1 表示，它们分别是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}\qquad\int\frac{xdx}{\sqrt{P(x)}}\qquad\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{P(x)}}\tag{6.9}$$

这三个基本椭圆积分依次称为第一种、第二种、第三种椭圆积分。三次多项式的标准形式是卫尔斯特拉斯形式

$$P(x)=4x^3-g_2x-g_3$$

代入 (6.9) 式得

$$\begin{aligned}I_0&=\int\frac{dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}\\I_1&=\int\frac{xdx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}\\J_1&=\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}\end{aligned}\tag{6.10}$$

这三个积分称为卫尔斯特拉斯第一种、第二种、第三种标准椭圆积分。由递推式得

$$I_2=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\frac{1}{6}\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}+\frac{1}{12}g_2I_0$$

$$I_3=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}=\frac{1}{10}x\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}$$

$$+\frac{3}{20}g_2I_1+\frac{1}{10}g_3I_0 \tag{6.11}$$

$$J_2=\int\frac{dx}{(x-c)^2\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

$$=\frac{2(I_1-cI_0)-(6c^2-1/2g_2)J_1-\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}/(x-c)}{4c^3-g_2c-g_3}$$

其余类推。

其次，研究$P(x)$为四次多项式的情形，分析过程同上，但采用两种不同形式的多项式

$$P(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4$$
$$=b_0(x-c)^4+4b_1(x-c)^3+6b_2(x-c)^2$$
$$+4b_3(x-c)+b_4 \tag{6.12}$$

得下列等式

$$\frac{d}{dx}\left(x^k\sqrt{P(x)}\right)=(k+2)a_0\frac{x^{k+3}}{\sqrt{P(x)}}$$

$$+2(2k+3)a_1\frac{x^{k+2}}{\sqrt{P(X)}}+6(k+1)a_2\frac{x^{k+1}}{\sqrt{P(x)}}$$

$$+2(2k+1)a_3\frac{x^k}{\sqrt{P(x)}}+ka_4\frac{x^{k-1}}{\sqrt{P(x)}} \tag{6.13}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x-c)^k\sqrt{P(x)}\right]=(k+2)b_0\frac{(x-c)^{k+3}}{\sqrt{P(x)}}$$

$$+2(2k+3)b_1\frac{(x-c)^{k+2}}{\sqrt{P(x)}}$$

$$+6(k+1)b_2\frac{(x-c)^{k+1}}{\sqrt{P(x)}}$$

$$+2(2k+1)b_3\frac{(x-c)^k}{\sqrt{P(x)}}+kb_4\frac{(x-c)^{k-1}}{\sqrt{P(x)}} \qquad (6.14)$$

(6.13) 式积分后令 $k=0，1，\cdots$得

$$2a_0I_3+6a_1I_2+6a_2I_1+2a_3I_0=\sqrt{P(x)}$$

$$3a_0I_4+10a_1I_3+12a_2I_2+6a_3I_1+a_4I_0=x\sqrt{P(x)} \qquad (6.15)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

(6.14) 式积分后令 $k=-1，-2，\cdots$得

$$(b_0-2b_1c)I_0+2(b_1-b_0c)I_1+b_0I_2-2b_3J_1-b_4J_2$$

$$=\frac{\sqrt{P(x)}}{x-c}-2b_1I_0-6b_2J_1-6b_3J_2-2b_4J_3$$

$$=\frac{\sqrt{P(x)}}{(x-c)^2} \qquad (6.16)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

利用递推式 (6.15)、(6.16)，以 I_0、I_1、I_2、J_1 为基本积分，可以推得任意椭圆积分 I_k 和 J_m。形式上看，$P(x)$ 为四次多项式时基本积分似乎多了一个，但后面将要看到在 $P(x)$ 为标准四次多项式的情形下，仍然仅有三个基本椭圆积分。

四次多项式的标准形式是勒让德标准形式

$$P(x)=(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

三种标准勒让德椭圆积分是

$$
\left.\begin{aligned}
F &= \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x_2)(1-k_2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \\
x &= \sin\varphi \\
E &= \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\,dx = \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \\
\Pi &= \int \frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \int \frac{d\varphi}{(1-c^{-2}\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \qquad n = -1/c^2
\end{aligned}\right\} \tag{6.17}
$$

因而得

$$
\left.\begin{aligned}
& I_0 = F \\
I_1 &= \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
& I_2 = (F-E)/k^2 \\
J_1 &= \int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \int \frac{(x+c)\,dx}{(x^2-c^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \\
&= \int \frac{\frac{1}{2}d(x^2)}{(x^2-c^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} - \frac{1}{c}\Pi
\end{aligned}\right\} \tag{6.18}
$$

上式中，J_1 第二行的第一项积分和 I_1 积分均能表示成初等函数。因此所有椭圆积分均可能用 E、F、Π 表示。由 I_k 的递推公式得

$$2k^2I_3-(1+k^2)I_1=\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}$$

$$3k^2I_4-2(1+k^2)I_2+I_0=x\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} \quad (6.19)$$

关于 J_k 的递推公式可由（6.16）式得出。

§6.3 第三种椭圆积分

在第一和第三章中已研究了第一和第二种标准椭圆积分及相应的全椭圆积分K和E。上一节讨论了这种标准椭圆积分与基本椭圆积分间的关系。对于第三种椭圆积分除在以前给出表示式外，尚未正式讨论过。本节将讨论各种符号的第三种椭圆积分。

先从第三种基本椭圆积分出发

$$\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{P(x)}} \quad (6.20)$$

设$P(x)$为三次多项式。可将一般三次多项式变换为卫尔斯特拉斯标准形式（参见§6.4.1），有

$$\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{4x^3-g_2x-g_3}}$$

$$=\int\frac{dx}{(x-c)\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}} \quad (6.21)$$

取变换

$$t=\frac{a}{x-b}$$

参看由（2.29）式到（2.28）式的变换过程，则上述积分化成下式

$$\int\frac{tdt}{(d-et)\sqrt{t(1-t)(1-k^2t)}}$$

以上各式中a、b、c、d、e均定常数。再令$t=z^2$，并使常数规一化得

$$\int \frac{z^2 dz}{(1-Az^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \tag{6.22}$$

这是经典形式的第三种椭圆积分，A是常数。令$z=\mathrm{sn}u$，得

$$\int \frac{z^2 dz}{(1-Az^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = \int \frac{\mathrm{sn}^2 u du}{1-A\mathrm{sn}^2 u} \tag{6.23}$$

当$A=0$，1，k^2时，分别得到下列三个雅各比函数的积分式

$$\int \mathrm{sn}^2 u du; \qquad \int \mathrm{sc}^2 u du; \qquad \int \mathrm{sd}^2 u du \tag{6.24}$$

对于其他任意A值，利用（2.32）式，其被积函数为

$$\frac{\mathrm{sn}^2 u}{1-A\mathrm{sn}^2 u} = \frac{1}{\mathrm{ns}^2 u - A} = \frac{1}{\wp u - \wp(v+iK')} \tag{6.25}$$

这里$A=\wp(v+iK')-e_2=\mathrm{ns}^2(v+iK')=k^2\mathrm{sn}^2 v$，$v$是对应$A$的常数。可见被积函数在$u=\pm v+iK'$上具有一个单极点。因为$(\mathrm{sn}^2 v)'=2\mathrm{sn}v\mathrm{cn}v\mathrm{dn}v$，有

$$k^2\mathrm{sn}v\mathrm{cn}v\mathrm{dn}v = \frac{1}{2}\wp'(v+iK')$$

再考虑到（5.14B）式，则由（6.25）式得

$$\frac{k^2\mathrm{sn}v\mathrm{cn}v\mathrm{dn}v\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2\mathrm{sn}^2 v\mathrm{sn}^2 u} = \frac{\frac{1}{2}\wp'(v+iK')}{\wp u - \wp(v+iK')}$$

$$= \frac{1}{2}\zeta(u-v-iK') - \frac{1}{2}\zeta(u+v+iK') + \zeta(v+iK') \tag{6.26}$$

将上式第二个等号二边积分得

$$\frac{1}{2}\int_0^u \frac{\wp'(v+iK')}{\wp u - \wp(v+iK')}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\sigma(u-v-iK')}{\sigma(u+v-iK')} + u\zeta(v+iK') \tag{6.27}$$

这是卫尔斯特拉斯符号第三种标准椭圆积分。雅各比曾用$\Pi(u, v)$表示（6.26）式第一个因子的积分，即

$$\Pi(u,\ v)=\int_0^u \frac{k^2 \mathrm{sn} v \mathrm{cn} v \mathrm{dn} v \mathrm{sn}^2 w}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 v \mathrm{sn}^2 w} dw \tag{6.28}$$

被积函数还可以用 Z 函数表示，由加法公式（5.49）得

$$\frac{k^2 \mathrm{sn} v \mathrm{cn} v \mathrm{dn} v \mathrm{sn}^2 u}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 v \mathrm{sn}^2 u}=\frac{1}{2} Z(u-v)$$

$$-\frac{1}{2} Z(u+v)-Z(v)$$

因为

$$Z(u)=\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$$

得

$$\Pi(u,\ v)=\frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}+u Z(v) \tag{6.29}$$

这是雅各比符号的第三种标准椭圆积分式，这里用 Θ、Z 代替了（6.27）式中的 σ 和 ζ。可以证明二者是等效的。

将（6.29）式中的 u 和 v 互换位置，并注意到 $\Theta(u)$ 是偶函数，则得

$$\Pi(v,\ u)=\frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(v-u)}{\Theta(v+u)}+v Z(u)$$

$$=\frac{1}{2} \ln \frac{\Theta(u-v)}{\Theta(u+v)}+v Z(u)$$

将上式与（6.29）式相减，则得

$$\Pi(u,\ v)-\Pi(v,\ u)=u Z(v)-v Z(u) \tag{6.29 A}$$

亦可求得下式

$$\Pi(u,\ v)-\Pi(v,\ u)=u E(v)-v E(u) \tag{6.29 B}$$

利用下等式

$$\frac{\mathrm{sn}^2 u}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 v \mathrm{sn}^2 u}=\frac{1}{k^2 \mathrm{sn}^2 v}\left[\frac{1}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 v \mathrm{sn}^2 u}-1\right]$$

可将第三种椭圆积分（6.23）式分成二个部分，即

$$\int \frac{\mathrm{sn}^2 u du}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 v \mathrm{sn}^2 u}=\frac{1}{k^2 \mathrm{sn}^2 v}\left\{\int \frac{du}{1-k^2 \mathrm{sn}^2 v \mathrm{sn}^2 u}-u\right\} \tag{6.30}$$

右方的积分式是勒让德第三种椭圆积分，记作$\Pi(\varphi, n, k)$，令$t=\mathrm{sn}u=\sin\varphi$，$n=-k^2\mathrm{sn}^2v$，得

$$\Pi(\varphi, n, k)=\int_0^u \frac{du}{1+n\mathrm{sn}^2u}$$

$$=\int_0^t \frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \tag{6.31}$$

不难看出勒让德第三种椭圆积分与雅各比第三种椭圆积分间关系为

$$\Pi(\varphi, n, k)=u+\frac{\mathrm{cn}v\mathrm{dn}v}{\mathrm{sn}v}\Pi(u, v) \tag{6.32}$$

为了便于用椭圆函数表示勒让德第三种椭圆积分，将常数n用β表示如下：

$$n=-\frac{1}{\mathrm{sn}^2\beta} \tag{6.33}$$

这使得（6.31）式被积函数$1/[1-\mathrm{sn}^2u/\mathrm{sn}^2\beta]$的极点是$\pm\beta$，周期是$(2K, 2K'i)$。这个二阶椭圆函数可以按（4.18）式用$\zeta$函数表示

$$f(u)=\frac{1}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2u}{\mathrm{sn}^2\beta}}=a_1\zeta(u-\beta_1)+a_2\zeta(u-\beta_2)$$

式中a_1和a_2是函数在极点的留数，可以求得

$$a_1=-\frac{\mathrm{sn}\,\beta}{2\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta},\quad a_2=\frac{\mathrm{sn}\,\beta}{2\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}$$

将a_1、a_2代入上式，并代入（3.109）式得

$$f(u)=\frac{\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}\left\{\frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\ln\vartheta_1\left(\frac{u+\beta}{2K}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\ln\vartheta_1\left(\frac{u-\beta}{2K}\right)\right]+c\right\} \tag{6.34}$$

由$\mathrm{sn}\,u=\vartheta_3\vartheta_1(v)/\vartheta_2\vartheta_4(v)$，得下列等式

$$\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}=\left[\frac{(\operatorname{sn} u)'}{\operatorname{sn} u}\right]^{-1}=\left[\frac{d}{du}\ln\operatorname{sn} u\right]^{-1}$$

$$=\left[\frac{d}{du}\{\ln\vartheta_1(v)-\ln\vartheta_4(v)\}\right]^{-1}$$

故二个留数可以写为

$$\mp\left[2\ \frac{d}{d\beta}\left\{\ln\vartheta_1\left(\frac{\beta}{2K}\right)-\ln\vartheta_4\left(\frac{\beta}{2K}\right)\right\}\right]^{-1}$$

在（6.34）式中令 $u\to 0$，得 c

$$c=-\frac{d}{d\beta}\ln\vartheta_4\left(\frac{\beta}{2K}\right)=-Z(\beta)$$

故得到当 $n<-1$ 时勒让德第三种标准椭圆积分的表示式

$$\Pi\left(\varphi,\ -\frac{1}{\operatorname{sn}^2\beta},\ k\right)$$

$$=\frac{\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{u+\beta}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{u-\beta}{2K}\right)}-u\frac{d}{d\beta}\ln\vartheta_4\left(\frac{\beta}{2K}\right)\right\},\quad u>\beta$$

$$=\frac{\operatorname{sn}\beta}{\operatorname{cn}\beta\operatorname{dn}\beta}\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\beta+u}{2K}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\beta-u}{2K}\right)}-u\frac{d}{d\beta}\ln\vartheta_4\left(\frac{\beta}{2K}\right)\right\},\quad u<\beta$$

$$n<-1 \tag{6.35}$$

除了 $n<-1$ 外，还有三种情况，即 $-1<n<-k^2$，$-k^2<n<0$，$n>0$。对此在（6.35）式中分别将 β 变成 $K+i\beta$，$\beta+iK'$，$(\beta+K')i$，相应 n 变成 $-\operatorname{dn}^2(\beta,k')$，$-k^2\operatorname{sn}^2\beta$，$k^2\operatorname{sc}^2(\beta,k')$。从而得

$$\Pi(\varphi, -\mathrm{dn}^2(\beta,k'), k) = \frac{i\,\mathrm{dn}(\beta, k')}{k'^2\mathrm{sn}(\beta,k')\mathrm{cn}(\beta, k')}$$

$$\cdot\left\{-\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_2\left(\frac{u+i\beta}{2K}\right)}{\vartheta_2\left(\frac{u-i\beta}{2K}\right)}+iu\frac{d}{d\beta}\ln\vartheta_3\left(\frac{i\beta}{2K}\right)\right\}$$

$$-1<n<-k^2,\quad 0<\beta<K' \tag{6.36}$$

$$\Pi(\varphi, -k^2\mathrm{sn}\,\beta, k) = -\frac{\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}$$

$$\cdot\left\{-\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_4\left(\frac{u+\beta}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u-\beta}{2K}\right)}-u\frac{d}{d\beta}\ln\vartheta_1\left(\frac{\beta}{2K}\right)\right\}$$

$$-k^2<n<0,\quad 0<\beta<K \tag{6.37}$$

$$\Pi(\varphi, k^2\mathrm{sc}^2(\beta, k'), k) = -\frac{i\,\mathrm{sn}(\beta, k')\mathrm{cn}(\beta, k')}{\mathrm{dn}(\beta, k')}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\vartheta_4\left(\frac{u+i\beta}{2K}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{u-i\beta}{2K}\right)}+iu\frac{d}{d\beta}\ln\vartheta_1\left(\frac{i\beta}{2K}\right)\right\}$$

$$n>0,\quad 0<\beta<K' \tag{6.38}$$

令 $u=K$，得到 n 不同区间上的第三种全椭圆积分的相应表示式

$$\Pi_1\left(-\frac{1}{\mathrm{sn}^2\beta}\right)=\frac{\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\beta}\{E\beta-KE(\beta)\} \tag{6.39}$$

$$\Pi_1(-\mathrm{dn}^2(\beta, k'))=K+\frac{\mathrm{dc}(\beta, k')}{k'^2\mathrm{sn}(\beta, k')}$$

$$\cdot\left[\frac{\pi}{2}-(E-K)\beta-KE(\beta, k')\right] \tag{6.40}$$

$$\Pi_1(-k^2\mathrm{sn}^2\beta)=K+\frac{\mathrm{sc}\,\beta}{\mathrm{dn}\,\beta}[KE(\beta)-E\beta] \tag{6.41}$$

$$\Pi_1(k^2\mathrm{sc}^2(\beta, k')) = K\mathrm{cn}^2(\beta, k') + \mathrm{sn}(\beta, k')\mathrm{cd}(\beta, k')[(E-K)\beta + KE(\beta, k')] \quad (6.42)$$

§6.4 椭圆积分中多项式的变换

从前面的分析中知道，对于椭圆积分$\int R(x, y)dx$，被积函数$y=\sqrt{P(x)}$，$P(x)$ 可以取以下几种形式

1. 三次多项式

$$P_3 = bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (6.43)$$

2. 四次多项式

$$P_4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 \quad (6.44)$$

3. 卫尔斯特拉斯标准形式

$$W = 4x^3 - g_2x - g_3 \quad (6.45)$$

4. 勒让德标准形式

$$L = (1-x^2)(1-k^2x^2), \quad k<1 \quad (6.46)$$

5. 第三种标准形式

$$T = x(x-m)(x-1) \quad (6.47)$$

第三种标准形式是由A. R. Low (1950) 提出的，它是介于卫尔斯特拉斯和勒让德标准形式间的一种形式，兼有二者的某些优点。实用上考虑较多的是前四种间的转换问题。这四种形式是可以互相变换的，但最令人感兴趣的是将普遍的三次和四次式变换成头二个标准形式。原则上讲，知道了 $P_3 \sim P_4$ 间的一种变换和$W\sim L$ 间的一种变换，以及上二组间的任一种变换就够了，其余变换均可通过中间变换而得到。但实用上不通过中间变换而进行任意二者间的直接变换会更方便些。当然，将标准形式变换成普遍形式是很少适用的，故我们把注意力放在下述几种变换上

$$P_3 \to P_4; \quad P_4 \to P_3; \quad W \to L; \quad L \to W;$$

$$P_3 \to W; \quad P_4 \to L; \quad L \to T$$

其中 $P_3 \to P_4$ 已在§1.1中讨论过，$L \to W$ 已在§2.3.1中讨论过。下面除 $P_4 \to L$ 将在§6.4.2中讨论外，其余四种将在§6.4.1中讨论

§6.4.1 多项式间的几种变换

一、$P_4 \to P_3$ 变换

设四次多项式 $P_4 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ 有一个根 x_1 是已知的，用如下变换

$$x = x_1 + \frac{1}{t}$$

代入 P_4 中得

$$P_4 = a\left(x_1 + \frac{1}{t}\right)^4 + b\left(x_1 + \frac{1}{t}\right)^3 + c\left(x_1 + \frac{1}{t}\right)^2$$

$$+ d\left(x_1 + \frac{1}{t}\right) + e = \frac{1}{t^4} P(t)$$

$$P(t) = (ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 + dx_1 + e)t^4$$

$$+ (4a_1x_1^3 + 3bx_1^2 + 2cx_1 + d)t^3$$

$$+ (6a_1x_1^2 + 3bx_1 + c)t^2 + (4ax_1 + b)t + a$$

$$= Bt^3 + ct^2 + Dt + a = P_3(t)$$

因为 x_1 是多项式的根，故 t^4 的系数等于0，即 $P(t)$ 是三次多项式，得

$$\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}} = \frac{-dt}{\sqrt{P_3(t)}} \tag{6.48}$$

二、$W \to L$ 变换

将 W 写成

$$W = 4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3) \tag{6.49}$$

分二种情况：一种是 e_i ($i = 1, 2, 3$) 为实数，另一种是 e_i 只有一个是实数。

当 e_i 全是实数时，设 $e_1 > e_3 > e_2$，取如下变换

$$x=\frac{e_1-e_2}{t^2}+e_2,\quad k^2=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2},\quad k'^2=\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2}\tag{6.50}$$

得
$$W=4(e_1-e_2)^3(1-t^2)(1-k^2t^2)/t^6$$

$$\frac{dx}{\sqrt{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)}}$$

$$=\frac{-dt}{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\tag{6.51}$$

当e_i中仅有一个是实数时，设

$$e_1=\alpha+j\beta,\ e_2=\alpha-j\beta,\ e_3=-2\alpha,\ (\beta>0)\tag{6.52}$$

这时需经过三次变量变换。

第一次令$x=\alpha+\beta/\xi$得

$$\frac{dx}{\sqrt{4[(x-\alpha)^2+\beta^2](x+2\alpha)}}$$

$$=\frac{d\xi}{2\sqrt{(1+\xi^2)(\beta+3\alpha\xi)\xi}}\tag{6.53}$$

第二次令 $\xi=\dfrac{\eta-\lambda}{\lambda\eta+1}$以及

$$\frac{3\alpha}{\beta}=\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\quad 或\quad \lambda=\frac{\sigma^2-3\alpha}{\beta},\quad \sigma^2=\sqrt{(3\alpha)^2+\beta^2}$$

得

$$\frac{d\xi}{2\sqrt{(1+\xi^2)(\beta+3\alpha\xi)\xi}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda}{2\beta}}\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta^2+1)(\eta^2-\lambda^2)}}\tag{6.54}$$

第三次令

$$\eta^2=\frac{\lambda^2}{1-t^2},\quad k^2=\frac{1}{1+\lambda^2}=\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2\sigma^2}$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{2\beta}}\frac{d\eta}{\sqrt{(\eta^2+1)(\eta^2-\lambda^2)}}$$

$$=\frac{1}{2\sigma}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{6.55}$$

从而得到了勒让德标准形式。

三、$P_3\to W$变换

取 $$P_3=b_0x^3+3b_1x^2+3b_2x+b_3 \tag{6.56}$$

令 $x=\frac{4}{b_0}t-\frac{b_1}{b_0}$

代入 P_3 得

$$P_3=\frac{16}{b_0^2}(4t^3-g_2t-g_3)$$

$$g_2=\frac{3}{4}(b_1^2-b_0b_2),\ g_3=\frac{1}{16}(3b_0b_1b_2-2b_1^3-b_0^2b_3)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{P_3(x)}}=\frac{dt}{\sqrt{4t^3-g_2t-g_3}} \tag{6.57}$$

四、$L\to T$变换

令 $x^2=1/t$，由勒让德标准多项式得

$$L(t)=\frac{(t-1)(t-m)}{t^2},\quad m=k^2$$

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\frac{-dt}{\sqrt{t(t-1)(t-m)}} \tag{6.58}$$

§6.4.2 化四次多项式为勒让德标准形式

勒让德标准椭圆积分是比较适用的，因为它仅有一个参变量 k，且有一个实数周期，这在数值计算上是方便的。因此不经过中间步骤直接将椭圆积分中的普遍四次多项式化为勒让德标准形式无疑是令人感兴趣的。下面来研究这种变换问题。

假定 $P_4(x)$ 的四个根为 x_1、x_2、x_3、x_4，因此可将 P_4 写成四个一次因子的乘积，再分二组集合起来，即

$$P_4(x)=P_1P_2 \tag{6.59}$$

$$P_1=p_1x^2+2q_1x+r_1=p_1(x-x_1)(x-x_2) \tag{6.60}$$

$$P_2=p_2x^2+2q_2x+r_2=p_2(x-x_3)(x-x_4)$$

引入新的参数 λ 和 ξ，使得 $P_1-\lambda P_2$ 化成包含有 ξ 的完全平方式，即

$$\begin{aligned}P_1-\lambda P_2&=(p_1-\lambda p_2)(x-\xi^2)\\&=(p_1-\lambda p_2)x^2+2(q_1-\lambda q_2)x+\\&\quad(r_1-\lambda r_2)\end{aligned} \tag{6.61}$$

为使这个关于 x 的二次等式成立，应有

$$-\xi=\frac{q_1-\lambda q_2}{p_1-\lambda p_2},\quad \xi^2=\frac{r_1-\lambda r_2}{p_1-\lambda p_2}$$

分别约去 ξ 和 λ 得

$$(q_1-\lambda q_2)^2-(p_1-\lambda p_2)(r_1-\lambda r_2)=0 \tag{6.62}$$

$$(p_1q_2-p_2q_1)\xi^2+(p_1r_2-p_2r_1)\xi+(q_1r_2-q_2r_1)=0 \tag{6.63}$$

(6.62) 式的二个根 λ_1、λ_2 与 (6.63) 式的二个根 ξ_1、ξ_2 是互相对应的。在进一步讨论之前，先来考察一下 (6.63) 式根 ξ_1、ξ_2 的属性。

当 $P_4(x)$ 的系数是实数时，四个根 x_1、x_2、x_3、x_4 或者全是实数，或者部分是实数，或者全是复数。但如有复数根，一定是成对出现。由此可以证明 ξ_1、ξ_2 是实数。方程 (6.63) 的判别式为

$$D=(p_1r_2-p_2r_1)^2-4(p_1q_2-p_2q_1)(q_1r_2-q_2r_1) \tag{6.64}$$

能将 D 用 $P_4(x)$ 的根表示，为此比较 (6.60) 式的系数得

$$2q_1=-p_1(x_1+x_2),\quad r_1=p_1x_1x_2$$

$$2q_2=-p_2(x_3+x_4),\quad r_2=p_2x_3x_4$$

代入 (6.63) 式得

$$\begin{aligned}&(x_1+x_2-x_3-x_4)\xi^2+2(x_3x_4-x_1x_2)\xi\\&+x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)=0\end{aligned} \tag{6.65}$$

代入 (6.64) 式得

$$D=(p_1p_2)^2\{(x_3x_4-x_1x_2)^2-(x_1+x_2-x_3-x_4)$$
$$[x_1x_2(x_3+x_4)-x_3x_4(x_1+x_2)]\}=a_0^2(x_1-x_3)$$
$$(x_1-x_4)(x_2-x_3)(x_2-x_4) \tag{6.66}$$

若四个根全是实数，可选 $x_1>x_2>x_3>x_4$，使 $D>0$。一般只要区间 (x_1, x_2) 与 (x_3, x_4) 不重叠，就可以使 $D>0$。若 x_3、x_4 是实数，x_1、x_2 是共轭复数，则

$$(x_1-x_3)(x_2-x_3)=|x_1-x_3|^2$$
$$(x_1-x_4)(x_2-x_4)=|x_1-x_4|^2$$

因此 $D>0$。若所有根均为复数，x_1、x_2 也是共轭复数

$$(x_1-x_3)(x_2-x_4)=|x_1-x_3|^2$$
$$(x_1-x_4)(x_2-x_4)=|x_1-x_4|^2$$

故 $D>0$ 总是成立，因此 ξ_1、ξ_2 是实数。现在回到 (6.63) 式

当 $p_1q_2-p_2q_1\neq 0$ 时，(6.63) 式有二个实数根 ξ_1、ξ_2，并设 λ_1、λ_2 为 (6.62) 式的根与 ξ_1、ξ_2 对应。将这二组根 (ξ_1, λ_1) 和 (ξ_2, λ_2) 代入 (6.60) 式得

$$P_1-\lambda_1P_2=(p_1-\lambda_1p_2)(x-\xi_1)^2$$
$$P_1-\lambda_2P_2=(p_1-\lambda_2p_2)(x-\xi_2)^2$$

由此可以解得 P_1、P_2 的表示式

$$P_1=b_1(x-\xi_1)^2+c_1(x-\xi_2)^2$$
$$P_2=b_2(x-\xi_1)^2+c_2(x-\xi_2)^2 \tag{6.67}$$

$$b_1=\frac{\lambda_2p_1-\lambda_1\lambda_2p_2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{p_1\xi_2+q_1}{\xi_1-\xi_2}$$

$$c_1=-\frac{\lambda_1p_1-\lambda_1\lambda_2p_2}{\lambda_2-\lambda_1}=-\frac{p_1\xi_1+q_1}{\xi_1-\xi_2}$$

$$b_2=\frac{p_1-\lambda_1p_2}{\lambda_2-\lambda_1}=\frac{p_2\xi_2+q_2}{\xi_1-\xi_2}$$

$$c_2=-\frac{p_1-\lambda_2p_2}{\lambda_2-\lambda_1}=-\frac{p_2\xi_1+q_2}{\xi_1-\xi_2}$$

令
$$Z=\frac{x-\xi_1}{x-\xi_2}$$

由 (6.59)(6.67) 式得

$$P_4(x)=P_1P_2=(x-\xi_2)^4Q(z)$$
$$Q(z)=(b_1z^2+c_1)(b_2z^2+c_2) \tag{6.68}$$

并有

$$\frac{dx}{\sqrt{P_4(x)}}=\frac{1}{(\xi_1-\xi_2)}\frac{dz}{\sqrt{(b_1z^2+c_1)(b_2z^2+c_2)}} \tag{6.69}$$

当 $p_1q_2-p_2q_1=0$ 时，(6.63) 式的一个解是 $\xi=-q_1/p_1=-q_2/p_2$，而另一个为 $\xi=\infty$。将 $q_i=-\xi p_i(i=1,\ 2)$ 代入 (6.60) 式，得 $P_i=p_ix^2-2p_i\xi x+r_i$，或

$$P_1=p_1(x-\xi)^2+r_1-p_1\xi^2$$
$$P_2=p_2(x-\xi)^2+r_2-p_2\xi^2$$

令 $z=x-\xi$，所以

$$P_4(x)=[p_1z^2+(r_1-p_1\xi^2)][p_2z^2+(r_2-p_2\xi^2)]$$

这正是 (6.68) 式中 $Q(z)$ 的形式。由 (6.65) 式可知，只有一个 ξ 解时意味着 $x_1+x_2=x_3+x_4$，这表示 $P_4(x)$ 出现复数根。此时由 (6.65) 式得 $\xi=(x_1+x_2)/2=-q_1/p_1$。

现在来研究将 $Q(z)$ 转化为勒让德标准形式 $L(t)=(1-t^2)(1-k^2t^2)$。$Q(z)$ 只能取下列形式的一种

$$(a^2-z^2)(b^2-z^2),\quad (z^2-a^2)(z^2-b^2),\quad (a^2-z^2)(z^2-b^2)$$
$$(a^2-z^2)(z^2+b^2),\quad (z^2-a^2)(z^2+b^2),\quad (z^2+a^2)(z^2+b^2)$$

式中 a、b 为常数，下面分别讨论之。

(1) $Q(z)=(a^2-z^2)(b^2-z^2),\quad a>b>z$

取变换 $Z=bt$，得 $Q(z)=a^2b^2L(t)$，$k=b/a$

$$\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=\frac{1}{a}\frac{dt}{\sqrt{L(t)}}=\frac{du}{a} \tag{6.70}$$

因为 $$\int_0^t\frac{dt}{\sqrt{L(t)}}=u,\quad t=\text{sn}\,u$$

得 $$z=b\,\text{sn}\,u,\quad k=b/a \tag{6.71}$$

(2) $Q(z)=(z^2-a^2)(z^2-b^2),\quad z>a>b$

取变换 $z=a/t$，得 $Q(z)=(a/t)^4L(t)$，$k=b/a$

$$\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=-\frac{dt}{a\sqrt{L(t)}} \tag{6.72}$$

$$z=\frac{a}{\operatorname{sn} u}, \quad k=\frac{b}{a} \tag{6.73}$$

（3） $Q(z)=(a^2-z^2)(z^2-b^2)$． $a>z>b$

取变换 $z^2=a^2(1-k^2t^2)$， $k^2=1-b^2/a^2$ 得

$$Q(z)=a^4k^4t^2(1-t^2)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=-\frac{dt}{a\sqrt{L(t)}} \tag{6.74}$$

$$z=a\operatorname{dn} u, \quad k^2=1-b^2/a^2 \tag{6.75}$$

（4） $Q(z)=(a^2-z^2)(z^2+b^2)$， $a>z$

取变换 $z^2=a^2(1-t^2)$， $k^2=a^2/(a^2+b^2)$， 得

$$Q(z)=a^2t^2(a^2+b^2)(1-k^2t^2)$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=-\frac{dt}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{L(t)}} \tag{6.76}$$

$$z=a\operatorname{cn} u, \quad k^2=a^2/(a^2+b^2) \tag{6.77}$$

（5） $Q(z)=(z^2-a^2)(z^2+b^2)$， $z>a$

取变换
$$z^2=\frac{a^2}{1-t^2}, \quad k^2=\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

得
$$Q(z)=\frac{a^2(a^2+b^2)t^2(1-k^2t^2)}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=\frac{-dt}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{L(t)}} \tag{6.78}$$

$$z=\frac{a}{\operatorname{cn} u}, \quad k^2=\frac{b^2}{a^2+b^2} \tag{6.79}$$

（6） $Q(z)=(z^2+a^2)(z^2+b^2)$， $a>b$

取变换

$$z^2=\frac{a^2(1-t^2)}{t^2} \qquad k^2=1-\frac{b^2}{a^2}$$

得
$$Q(z)=\frac{a^4(1-k^2t^2)}{t^5}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{Q(z)}}=-\frac{dt}{a\sqrt{L(t)}} \tag{6.80}$$

$$z=\frac{a\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u},\quad k^2=1-\frac{b^2}{a^2} \tag{6.81}$$

§6.5 全椭圆积分K和E的微分方程

勒让德曾证明，第一种全椭圆积分K和K'满足下列微分方程

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{du}{dk}\right)-ku=0 \tag{6.82}$$

为了证明这个方程，对全椭圆积分的参数式进行微分。由下式

$$K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt$$

得

$$\frac{dK}{dk}=\int_0^1\frac{kt^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)^3}}$$

$$=\frac{1}{k}\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)^3}}-\frac{K}{E}$$

根据

$$\frac{d}{dt}\left\{k^2t\sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}}\right\}=k^2\sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2t^2}}$$

$$-\frac{k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+\frac{k^4t^2\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{(1-k^2t^2)^3}}$$

$$=\frac{k^2\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{(1-k^2t^2)^3}}-\frac{k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}-\frac{k'^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)^3}}$$

求积分后，得

$$\int_0^1 \frac{k'^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)^3}}=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt=E$$

因此得

$$\frac{dK}{dk}=\frac{E}{kk'^2}-\frac{K}{k} \tag{6.83}$$

又

$$\frac{dE}{dk}=-\int_0^{\pi/2}\frac{k\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi=\frac{E-K}{k} \tag{6.84}$$

由（6.83）和（6.84）式得

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{dK}{dk}\right)=\frac{dE}{dk}+2kK-k'^2\frac{dK}{dk}$$

$$=\frac{E}{k}-\frac{K}{k}+2kK-k'^2\frac{dK}{dk}=kK$$

（6.82）式得证。

用类似的方法得E及$E'-K'$满足下列微分方程

$$k'^2\frac{d}{dk}\left(k\frac{du}{dk}\right)+ku=0 \tag{6.85}$$

所得到的关于模数的导数公式可以证明勒让德关系式

$$KK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}$$

藉助微分可知等号左方等于常数A，并能发现$dA/dk=0$，故A是与k无关的，为了确定这个常数，令$k\to0$，即得$A=\pi/2$。

§6.6 全椭圆积分的计算

实际应用中经常出现第一、第二和第三种全椭圆积分，其中K、E是模数k的函数，而第三种全椭圆积分$\Pi_1(n, k)$则同时是n和k的函数。

$$K=K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{6.86}$$

$$E=E(k)=\int_1^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$=\int_0^1\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}\,dt \tag{6.87}$$

$$\Pi_1=\Pi_1(n, k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{(1+nt^2)\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{6.88}$$

这些全椭圆积分均可展成k的级数。由(2.48)、(3.40)式

$$K=\frac{\pi}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\right)^2k^8+\cdots\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(2m)!\,(2m)!}{2^{4m}(m!)^4}k^{2m} \tag{6.89}$$

$$E=\frac{\pi}{2}\left\{1-\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1^2\cdot 3}{2^2\cdot 4^2}k^4-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}k^6\right.$$

$$\left.-\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 8^2}k^8-\cdots\right\}=\frac{\pi}{2}$$

$$\cdot\left\{1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2m-2)!\,(2m)!}{2^{4m-1}(m-1)!\,(m!)^{3}}k^{2m}\right\} \qquad (6.90)$$

可用超几何级数表示K、E。因为

$$F(a,\ b,\ c,\ x)=1+\frac{a\cdot b}{c\cdot 1}x+\frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{c(c+1)\cdot 1\cdot 2}x^{2}+\cdots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!}x^{m}$$

可见这一级数在$a=b=1/2$，$c=1$，$x=k^2$时变成$2K/\pi$，而在$a=-1/2$，$b=1/2$，$c=1$，$x=k^2$时，变成$2E/\pi$。故得

$$K=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ k^{2}\right),\quad |k|<1 \qquad (6.91)$$

$$E=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ k^{2}\right),\quad |k|<1 \qquad (6.92)$$

将k^2换成$k'^2=1-k$，则得

$$K'=\frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1-k^{2}\right)$$

$$E'=\frac{\pi}{2}F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1-k^{2}\right)$$

利用超几何函数的变换（过程略），得到

$$K'=F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ k^{2}\right)\ln\frac{4}{k}-\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)_m\right]^{2}\frac{k^{2m}}{(m!)^{2}}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n(2n-1)} \qquad (6.93)$$

$$E' = 1 + \frac{k^2}{2} F\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 2, k^2\right) \ln \frac{4}{k}$$

$$- \frac{k^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)_m \left(\frac{1}{2}\right)_m \frac{k^{2m}}{(m!)(m+1)!}$$

$$\cdot \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{2}{(n+1)(2n+1)} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \right] \qquad (6.94)$$

对于第三种全椭圆积分，类似K和E，利用被积函数的二项式展开式可以得到

$$\Pi_1(n, k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_m}{m!} (-n)^m B_m^{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{k^2}{n}\right) \qquad (6.95)$$

$$|k| < 1, |n| < 1$$

式中

$$B_m^{(\alpha)}(z) = \sum_{l=0}^{m} \binom{\alpha}{l} z^l$$

是二项式展开式的简写形式

由上可知，在k和n已知的情况下，K、K'、E、E'和$\Pi_1(n, k)$均可以通过上述级数计算。实用上可以得到收敛更快的级数，因为在$q = e^{\pi \tau i}$已知时，可以得到收敛很块的西他级数，而K、E等均可表示成西他级数形式。

从 (3.117)～(3.119) 式中已知

$$K = \frac{\pi}{2} \vartheta_3, \quad \pi \frac{K'}{K} = -i\pi\tau = \ln \frac{1}{q}, \quad q = e^{-\pi \frac{K'}{K}} \qquad (6.96)$$

$$k = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}, \quad k' = \frac{\vartheta_4^2}{\vartheta_3^2} \qquad (6.97)$$

由 (3.76) 式得

$$K=\frac{\pi}{2}\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\right] \tag{6.98}$$

这是K的西他级数式。对于E，由§3.6的分析得

$$\mathrm{dn}^2u=\frac{d^2}{du^2}\ln\vartheta_4(v)+\frac{E}{K}$$

$$=\frac{1}{4K^2}\frac{\vartheta_4''(v)\vartheta_4(v)-\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4^2(v)}+\frac{E}{K},\quad u=2Kv$$

当$v\to 0$时，$\mathrm{dn}^2u=1$，$\vartheta_4'=0$，

$$\vartheta_4''=8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2q^{n^2}$$

代入上式，并利用（3.76）式的ϑ_4得

$$E=K-\frac{1}{4K}\frac{\vartheta_4''}{\vartheta_4}=K-\frac{2\pi^2}{K}\cdot\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n^2q^{n^2}}{1+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nq^{n^2}} \tag{6.99}$$

由（3.92）～（3.94）式得

$$k=4\sqrt{q}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^4 \tag{6.100}$$

$$k'=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^4 \tag{6.101}$$

至于K'和E'很易由（6.96）式和勒让德关系式得到

$$K'=\frac{K}{\pi}\ln\frac{1}{q} \tag{6.102}$$

$$\frac{E'}{K'}=1+\frac{\pi}{2KK'}-\frac{E}{K} \tag{6.103}$$

由式（6.98）～（6.103），在给定q时可以计算出k、k'、K、K'、E、E'。反过来也可用（6.97）由给定的k来计算q。卫

尔斯特拉斯曾假设

$$\left|\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}\right|<1$$

提出了很方便的计算方法。实际上常见的是$0<k<1$，并有$0<k'<1$。故上述条件是能满足的。设

$$\lambda=\frac{1}{2}\frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}} \tag{6.104}$$

将（6.97）代入得

$$\lambda=\frac{1}{2}\frac{\vartheta_3-\vartheta_4}{\vartheta_3+\vartheta_4}$$

或

$$\lambda=\frac{q+q^9+q^{25}+\cdots}{1+2q^4+2q^{16}+2q^{36}+\cdots} \tag{6.105}$$

该方程对q的可能解是一个幂级数

$$q=\lambda+a_1\lambda^5+a_2\lambda^9+a_3\lambda^{14}+\cdots$$

用逐步逼近法，可以决定出系数a_i，从而得

$$q=\lambda+2\lambda^5+15\lambda^9+150\lambda^{13}+1707\lambda^{17}+20910\lambda^{21}+\cdots \tag{6.106}$$

由（6.104)式知$\lambda<\frac{1}{2}$。故级数（6.106）收敛很快，仅需取头几项，即能得到很好的计算精度。

利用已算出的q，代入（6.98）和（6.102）即可得到K及K'的值。此外应用西他函数ϑ_i($i=1,2,3,4$）的q级数展开式，可求得函数值。又应用（3.119)～(3.120）可得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sn}(u,k)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_1(v|\tau)}{\vartheta_4(v/\tau)}\\
&\mathrm{cn}(u,k)=\frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta_2(v|\tau)}{\vartheta_4(v|\tau)}\\
&\mathrm{dn}(v,k)=\sqrt{k'}\frac{\vartheta_3(v|\tau)}{\vartheta_4(v|\tau)}\\
&\tau=\frac{iK'}{K},\quad q=e^{\pi\tau i}=e^{-\pi\frac{K'}{K}}
\end{aligned}\right\} \tag{6.107}$$

由此可以求出 $\mathrm{sn}\,u$，$\mathrm{cn}\,u$，$\mathrm{dn}\,u$ 等函数值，或在已知函数的情况下，推算出变量 u。

§6.7 化超椭圆积分为标准形式

下形椭圆积分

$$z=\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x^2)(1\;k^2x^2)}}\tag{6.108}$$

根号中多项式为五次，因此它是超椭圆积分。凯莱[1] (Cayley) 曾用变量置换法，将其转化为具有互补模数的二个标准椭圆积分之和，从而解决了求解这类特殊超椭圆积分问题。下面进行具体分析。

先引入二个常量 b 和 b'，它们与 k 的关系为

$$b=\frac{1+\sqrt{k}}{\sqrt{2+2k}},\quad b'=\frac{1-\sqrt{k}}{\sqrt{2+2k}},\quad k=\left(\frac{b-b'}{b+b'}\right)^2\tag{6.109A}$$

$$b^2+b'^2=1,\quad b^2\geqslant\frac{1}{2}\geqslant b'^2\tag{6.109B}$$

$$b+b'=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+k}},\quad b-b'=\frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{1+k}}\tag{6.109C}$$

再引入变量 ζ 替代 x，令

$$\sqrt{x}=\frac{(b+b')\zeta}{\sqrt{1-b^2\zeta^2}+\sqrt{1-b'^2\zeta^2}}=\frac{(b+b')\zeta}{z+z'}\tag{6.110}$$

$$z=\sqrt{1-b^2\zeta^2},\quad z'=\sqrt{1-b'^2\zeta^2}$$

因此可以得到

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+kx)\\&=\left[1+\frac{(b+b')^2\zeta^2}{(z+z')^2}\right]\left[1+\frac{k(b+b')^2\zeta^2}{(z+z')^2}\right]\end{aligned}$$

---

[1] Cayley: Elliptic Function, Cambridge, 1895, P. 360

等式右方分子为

$$
\begin{aligned}
&(z+z')^4+(1+k)(b+b')^2\zeta^2(z+z')^2 \\
&+k(b+b')^4\zeta^4=(z+z')^4+2\zeta^2(z+z')^2 \\
&+(b^2-b'^2)^2\zeta^4=(z+z')^4+2\zeta^2(z+z')^2 \\
&+(z^2-z'^2)^2=(z+z')^2[(z+z')^2+2\zeta^2 \\
&+(z-z')^2]=2(z+z')^2(z^2+z'^2+\zeta^2) \\
&=4(z+z')^2
\end{aligned}
$$

从而得

$$
(1+x)(1+kx)=\frac{4}{(z+z')^2} \tag{6.111A}
$$

类似过程得

$$
(1-x)(1-kx)=\frac{4(1-\zeta^2)}{(z+z')^2} \tag{6.111B}
$$

对 (6.110) 式微分得

$$
\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\frac{dx}{d\zeta}=(b+b')\left[\frac{1}{z+z'}+\frac{\zeta}{(z+z')^2}\left(\frac{b^2\zeta}{z}+\frac{b'^2\zeta}{z'}\right)\right]
$$

将 $b^2\zeta^2=1-z^2$, $b'^2\zeta^2=1-z'^2$ 代入上式得

$$
\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{2(b+b')d\zeta}{(z+z')zz'} \tag{6.112}
$$

将 (6.111A、B), (6.112) 式代入 (6.108) 式得

$$
\begin{aligned}
Z=\frac{1}{2}(b+b')\int_0^{\zeta}\frac{(z+z')d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}\,zz'}=\frac{1}{\sqrt{2+2k}} \\
\cdot\int_0^{\zeta}\left\{\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-b^2\zeta^2)}}\right. \\
\left.+\frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-b'^2\zeta^2)}}\right\}
\end{aligned} \tag{6.113}
$$

至此已将超椭圆积分（6.108）化简为模数 b 及补模数 b' 的二个标准椭圆积分之和。

令 $c=\sqrt{2+2k}$，并用雅各比函数的反函数形式，则(6.113)式可表示为

$$cz=\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, b)+\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, b') \tag{6.114}$$

由（6.111A）和（6.110）式得

$$(1+x)(1+kx)\zeta^2=\frac{4\zeta^2}{(z+z')^2}=\frac{4x}{(b+b')^2}$$

将（6.109C）的第一式代入上式得

$$\zeta^2=\frac{2(1+k)x}{(1+x)(1+kx)} \tag{6.115}$$

与（6.108）式相似的更一般的超椭圆积分具有下列形式

$$Z=\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}} \tag{6.116}$$

式中 λ 是另一种独立参量。令

$$b=\frac{\sqrt{k}+\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}},\quad b'=\frac{1-\sqrt{k\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}} \tag{6.117A}$$

$$c=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}}\qquad c'=\frac{1+\sqrt{k\lambda}}{\sqrt{(1+k)(1+\lambda)}} \tag{6.117B}$$

$$k=\left(\frac{b'-c'}{b-c}\right)^2\qquad \lambda=\left(\frac{b'-c'}{b+c}\right)^2 \tag{6.117C}$$

用类似的分析，可以得到形式上与（6.114）式相同的结果

$$DZ=\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, b)+\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, c) \tag{6.118}$$

$$D=\sqrt{(1+k)(1+\lambda)},\qquad \zeta=\sqrt{\frac{(1+k)(1+\lambda)x}{(1+kx)(1+\lambda x)}}$$

对于超椭圆积分

$$Z=\int\frac{xdx}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}}\tag{6.119}$$

可以表示为

$$EZ=\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, b)-\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, c)\tag{6.120}$$

$$E=\sqrt{k\lambda(1+k)(1+\lambda)}$$

式中ζ，b，c均与（6.118）式相同。

利用变量变换可将一般椭圆积分化为超椭圆积分，由此可以看出超椭圆积分的一种化简方法。令

$$y=\frac{Ax}{(1+Bx)^2}\tag{6.121}$$

则有

$$Z=\int\frac{dy}{\sqrt{y(1-y)(1-\sigma y)}}\tag{6.122A}$$

$$=\int\frac{A(1-Bx)dx}{\sqrt{Ax[(1+Bx)^2-Ax][(1+Bx)^2-\sigma Ax]}}\tag{6.122B}$$

$$=\int\frac{\sqrt{A}(1-Bx)dx}{\sqrt{x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)}}\tag{6.122C}$$

常数A，B与k，λ间的关系可以由下列等式得出

$$\begin{aligned}&x[(1+Bx)^2-Ax][(1+Bx)^2-\sigma Ax]\\&=x(1-x)(1+kx)(1+\lambda x)(1-k\lambda x)\end{aligned}\tag{6.123}$$

故

$$B^4=k^2\lambda^2,\quad B=\pm\sqrt{k\lambda},\ \text{取}\ B=\sqrt{k\lambda}$$

$$(1+Bx)^2-Ax=(1-x)(1-k\lambda x)$$

$$(1+Bx)^2-\sigma Ax=(1+kx)(1+\lambda x)$$

由此得

$$A-2\sqrt{k\lambda}=1+k\lambda$$

$$\sigma A-2\sqrt{k\lambda}=-k-\lambda$$

解得

$$A=(1+\sqrt{k\lambda})^2 \qquad \sigma A=-(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda})^2 \tag{6.124}$$

$$(B=\sqrt{k\lambda})$$

若取$B=-\sqrt{k\lambda}$，得

$$A=(1-\sqrt{k\lambda})^2 \qquad \sigma A=-(\sqrt{k}+\sqrt{\lambda})^2 \tag{6.125}$$

$$(B=-\sqrt{k\lambda})$$

可见形如（6.122B）的超椭圆积分可藉助变量变换(6.121)式化简为普通椭圆积分（6.122A),后者很易化为标准椭圆积分。而超椭圆积分（6.122B）与（6.122C）是等效的，二者常数间关系如（6.124）或（6.125）式所示。

第七章　椭圆函数的变换

§7.1　椭圆函数变换的一般概念

研究椭圆函数的变换实际上是研究具有不同双周期椭圆函数间的关系。设有二椭圆函数$\varphi(u)$，$\psi(u)$，其双周期分别是$(2\omega_1', 2\omega_2')$，$(2\omega_1, 2\omega_2)$，并假定$I_m(\omega_2'/\omega_1')>0$，$I_m(\omega_2/\omega_1)>0$。并且二者的基本周期间满足下列关系式

$$\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\tag{7.1}$$

$$n=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}>0\tag{7.2}$$

式中a，b，c，d，n是整数。椭圆函数变换的一个重要性质是在满足关系式（7.1）的条件下，$\varphi(u)$与$\psi(u)$间存在一代数关系式

$$P[\varphi(u),\ \psi(u)]=0\tag{7.3}$$

为了证明该关系式，令

$$\tilde{\omega}_1'=r\omega_1'$$

$$\tilde{\omega}_2'=s\omega_2'$$

r，s是整数，因此有

$$\begin{bmatrix}\tilde{\omega}_1'\\ \tilde{\omega}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

令函数$F(u)=\wp(u|\tilde{\omega}_1', \tilde{\omega}_2')$。因为任意周期$(2\omega_1, 2\omega_2)$的椭圆函数均可展成$\wp(u|\omega_1, \omega_2)$的代数式，故$\varphi(u)$和$\psi(u)$都是偶函数，且周期为$(2\tilde{\omega}_1', 2\tilde{\omega}_2')$。因此这二个函数均可用$F(u)$的有理函数表示，即

$$\varphi(u)=R_1[F(u)]=x,\quad \psi(u)=R_2[F(u)]=y$$

由上二式中约去$F(u)$，就得到关系式（7.3），实际上考虑（7.1）就足够了，此时

$$x=\mathscr{P}(u|\omega_1, \omega_2), \quad y=\mathscr{P}(u|\omega_1', \omega_2')$$

$$P(x, y)=0 \tag{7.4}$$

P是x，y的多项式，并是关于y的n次方程。我们将n称为变换的级数。并把所研究的变换称作**n级变换**。

若生成元（ω_1，ω_2）的格阵为Ω，而生成元（ω_1'，ω_2'）的格阵为Ω'。不难看到，Ω'的单位胞腔在面积上是Ω的n倍，在全平面上Ω'格阵点的密度仅是Ω格阵点的$1/n$。可以将Ω看成是Ω'的一个子格阵，而Ω'是Ω的n级格阵。一个特例是当（7.1）式中的$b=c=0$，$a=d=m$，则Ω'是Ω的m^2级格阵。因为Ω与Ω'间存在（7.1）关系式，故

$$n\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d & -c\\ -b & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix} \tag{7.5}$$

即$n\Omega$是Ω'的n级格阵。因此一般有，若Ω'与Ω的n级格阵相相似，则$n\Omega$与Ω'的n级格阵相似。

$n=1$的变换称为一级变换，所有的一级变换构成一个群（模群，关于模群等概念见下一章），该模群（任意一级变换）可以连续应用以下两个基本的一级变换而得到

$$T_a=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \qquad T_b=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix} \tag{7.6}$$

即任意幺模变换是T_a和T_b的幂的乘积。因此研究一级变换可以限于研究T_a和T_b。

类似地，二级变换可以限于研究所谓朗当（Landen）变换

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix} \qquad T_L=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{7.7}$$

而任意二级变换T_2可以写成$T_2=T_{1\alpha}LT_{1\beta}$，式中$T_{1\alpha}$和$T_{1\beta}$是幺模变换。

m级变换可以有如下二种

第一种：$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix}$

$$\text{或} \quad \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

第二种：$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix}$

$$\text{或} \quad \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \tag{7.9}$$

第一种变换是第一个周期（$2\omega_1$）被整数m除，而第二种变换是第二个周期（$2\omega_2$）被m除。可以证明，任意n级变换能用上述第一种和第二种变换加上二个一级变换来表示。

若有变换

$$\begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = n \tag{7.10}$$

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \qquad |T| = n$$

用m_1表示α，β的最大公约数，使

$$\alpha = m_1 a, \quad \beta = m_1 b$$

则有二个整数c，d存在，使

$$ad - bc = 1$$

即

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

为一级变换，显然

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix}$$

也是一级变换。设 $m_1 \cdot m_2 = n$，有

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} m_1 a & m_1 b \\ qa + m_2 c & qb + m_2 d \end{bmatrix}$$

这里

$$\begin{vmatrix} m_1 a & m_1 b \\ qa + m_2 c & qb + m_2 d \end{vmatrix} = n$$

即将数对 $(2\omega_1, 2\omega_2)$ 变成数对 $(2\omega_1', 2\omega_2')$ 可分为四个变换：第一周期的乘法变换，一级变换，第二周期的乘法变换，一级变换。

§7.2 一级变换

可能的一级变换有下列几种

$$T_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{7.11}$$

$$T_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_d = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

其中 T_u 是自身或相等变换。后三种均可用 T_a，T_b表示，即

$$T_c = T_a T_b T_a, \quad T_d = T_u T_b T_a T_b, \quad T_e = T_b T_a T_b T_a \tag{7.12}$$

因此对于一级变换，主要是研究 T_a和 T_b，下面研究不同函数的一级变换。

（1）卫尔斯特拉斯函数

在§1.2中曾指出格阵Ω的生成元不是唯一的，一级变换前后的生成元产生同一格阵Ω。由于函数$\wp(u)$，$\sigma(u)$，$\zeta(u)$以及不变量 g_2，g_3和$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$仅决定于Ω，因此它们对于一级变换是不变的。但在格阵点上某些函数值所对应的常数要产生次序上的变化，或产生相应的变化。

对于函数，$\wp(u)$，由（2.12）和（2.13）式得

$$e_1=\wp(\omega_1|\omega_1,\ \omega_2),\ e_2=\wp(\omega_2|\omega_1,\ \omega_2),$$
$$e_3=(-\omega_1-\omega_2|\omega_1,\ \omega_2)$$
$$(\omega_1=\omega,\ \omega_2=\omega',\ \omega_3=-\omega_1-\omega_2)$$

经 T_a变换后，$\omega_1'=\omega_1$，$\omega_2'=\omega_1+\omega_2$

$$e_1'=\wp(\omega_1'|\omega_1',\ \omega_2')=e_1,\ e_2'=\wp(\omega_2'|\omega_1',\ \omega_2')=e_3,$$
$$e_3'=\wp(-\omega_1'-\omega_2'|\omega_1',\ \omega_2')=e_2$$

可见变换后，e_2与e_3调换了位置，其余类推。今将（7.11）式的各种变换的 ω_1'，ω_2'及 e_i'列表如下

变换	ω_1'	ω_2'	e_1'	e_1'	e_3'
T_u	ω_1	ω_2	e_1	e_2	e_3
T_a	ω_1	$\omega_1+\omega_2$	e_1	e_3	e_2
T_b	ω_2	$-\omega_1$	e_2	e_1	e_3
T_c	$\omega_1+\omega_2$	ω_2	e_3	e_2	e_1
T_d	$-\omega_1+\omega_2$	$-\omega_1$	e_3	e_1	e_2
T_e	ω_2	$-\omega_1-\omega_2$	e_2	e_3	e_1

(7.13)

在一般变换T（见(7.10）式）中，若α和δ为奇整数，β和γ为偶整数时，我们把这种变换称为λ-变换。对于λ-变换

$$e_1'=\wp(\omega_1'|\omega_1',\ \omega_2')=\wp(\alpha\omega_1+\beta\omega_2|\omega_1,\ \omega_2)$$
$$=\wp(\omega_1)=e_1$$

因为函数的周期是$2\omega_1$，$2\omega_2$，而$\alpha-1$和β均是偶数（包括0）的原故。类似可以得到$e_2'=e_2$，$e_3'=e_3$。

对于函数$\sigma_i(u)$，由（5.18）式知

$$\sqrt{\wp(u)-e_i}=\frac{\sigma_i(u)}{\sigma(u)}\qquad i=1,\ 2,\ 3$$

由于$\wp(u)$，$\sigma(u)$均不随一级变换而变化，故σ_i与e_i相对应，随着不同的一级变换而改变次序。

对于函数$\zeta(u)$，由（3.6）和（3.9）式得

$$\eta_1'=\zeta(\omega_1'|\omega_1',\ \omega_2')=\zeta(\omega_1'|\omega_1,\ \omega_2)$$
$$=\zeta(\alpha\omega_1+\beta\omega_2|\omega_1,\ \omega_2)=\alpha\eta_1+\beta\eta_2\qquad(7.14)$$

$$\eta_2' = \gamma\eta_1 + \delta\eta_2$$

可见 η_1，η_2与 ω_1，ω_2有着相同的变换。

（2）雅各比函数

根据（2.30）～（2.73）式，可见上述λ-变换不改变雅各比-哥来舍尔函数。但任意其他一级变换均要影响雅各比-哥来舍尔函数。下面分别研究二个主要的一级变换。

首先研究变换 T_a。考察下二个椭圆函数

$$x = \mathrm{sn}^2(u,\ k),\quad y = \mathrm{sn}^2(v,\ \delta),\quad v = \frac{u}{M} \tag{7.15}$$

M是常数。函数 $\mathrm{sn}^2(u,\ k)$ 的周期是 $2K$，$i\,2K'$；$u = iK'$ 是二阶级点。另外用 $2L$，$i\,2L'$ 表示 $\mathrm{sn}^2(v,\ \delta)$ 的周期，因此在 u 平面上 y 的周期为 $2ML$，$i\,2ML'$，$u = iML'$ 是二阶极点。对于 T_a变换，有

$$\begin{bmatrix} ML \\ iML' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ iK' \end{bmatrix} \tag{7.16}$$

研究 y/x，这是一个偶椭圆函数，周期为 $2K$，$i\,2K'$。根据 y 和 x 在单位胞腔上的极点位置，可见 y/x 在点 $u = iML' = K + iK'$ 处具有二阶极点，而在 $u = iK'$ 处具有二阶零点。因为 y/x 是偶椭圆函数，故可将它表示为 $\mathrm{sn}^2(u,\ k)$ 的有理函数，即

$$\frac{y}{x} = \frac{A}{1 - k^2 x^2}$$

式中 A 为待定常数。令 $u = K$，于是得

$$1 = \frac{A}{1 - k^2},\qquad A = k'^2$$

故有

$$\frac{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{u}{M},\ \delta\right)}{\mathrm{sn}^2(u,\ k)} = \frac{k'^2}{1 - k^2\mathrm{sn}^2(u,\ k)} \tag{7.17}$$

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \delta\right) = \frac{k'\,\mathrm{sn}(u,\ k)}{\mathrm{dn}(u,\ k)}$$

为了决定M及δ，将上式用u除，再令$u\to 0$，得

$$\frac{1}{M}=k'$$

在（7.17）式中，令$u=2K+iK'$得

$$\frac{1}{\delta^2}=-\frac{k'^2}{k^2},\qquad \delta=\frac{ik}{k'}$$

最后得

$$\operatorname{sn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right)=\frac{k'\operatorname{sn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}=k'\operatorname{sd}(u,k)\quad(7.18)$$

同理（或由（7.17）式）得

$$\operatorname{cn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right)=\frac{\operatorname{cn}(u,k)}{\operatorname{dn}(u,k)}=\operatorname{cd}(u,k)\quad(7.19)$$

$$\operatorname{dn}\left(k'u,\frac{ik}{k'}\right)=\frac{1}{\operatorname{dn}(u,k)}=\operatorname{nd}(u,k)\quad(7.20)$$

当k在区间$[0,1]$上变化时，$k/\sqrt{1-k^2}=k/k'$由0变化至∞，故（7.18）～（7.20）式为具有纯虚数模的雅各比函数用模数在$[0,1]$内的雅各比函数表示。故这种变换亦被称为虚模数变换。

其次，研究变换T_b。仍用如（7.15）式的二个椭圆函数x，y，其周期分别是（$2K$，$i\,2K'$）和（$2ML$，$i\,2ML'$），所对应的变换为

$$\begin{bmatrix} ML \\ iML' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K \\ iK' \end{bmatrix}\quad(7.21)$$

因为实数和虚数周期变换后互换位置，故把这种变换称作雅各比虚变换。函数

$$\frac{y}{x}=\frac{\operatorname{sn}^2\left(\frac{u}{M},\delta\right)}{\operatorname{sn}^2(u,k)}$$

在单位胞腔中的$u=iK'$处具有二阶零点（因为该点是x的二阶极点），并在$u=K$处具有二阶极点（因为该点是y的二阶极点）。y/x是$\operatorname{sn}^2(u,k)$的有理函数，故有

$$\frac{y}{x}=\frac{A}{\mathrm{sn}^2(u,\ k)-1}$$

令 $u\to 0$，得

$$\frac{1}{M^2}=-A$$

在

$$y=\mathrm{sn}^2\left(\frac{u}{M},\ \delta\right)=A\frac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2(u,\ k)-1} \qquad (7.22)$$

中，令 $u=iK'$，得 $A=1$，在上式中再令 $u=K+iK'$ 得

$$\mathrm{sn}^2(L+iL',\ \delta)=\frac{\mathrm{sn}^2(K+iK',k)}{\mathrm{sn}^2(K+iK',k)-1}$$

或

$$\frac{1}{\delta^2}=\frac{\dfrac{1}{k^2}}{\dfrac{1}{k^2}-1}$$

从而得

$$\delta=k',\ M=\frac{1}{i}$$

由（7.22）式得：

$$\mathrm{sn}(iu,\ k')=i\,\frac{\mathrm{sn}(u,\ k)}{\mathrm{cn}(u,\ k)}=i\,\mathrm{sc}(u,\ k) \qquad (7.23)$$

同理（或由（7.17）式）得

$$\mathrm{cn}\,(iu,\ k')=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,\ k)}=\mathrm{nc}(u,\ k) \qquad (7.24)$$

$$\mathrm{dn}\,(iu,\ k')=\frac{\mathrm{dn}(u,\ k)}{\mathrm{cn}(u,\ k)}=\mathrm{dc}(u,\ k) \qquad (7.25)$$

（7.23）～（7.25）式将纯虚变量的雅各比函数用实变量的雅各比函数表示。

（3）西他函数

首先分析一般形式的一级变换

$$\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}\qquad \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix}=1 \tag{7.26}$$

$$(\omega_1=\omega,\quad \omega_2=\omega')$$

因为一级变换不影响σ函数，故由（3.95）式得

$$\sigma(u)=2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_1(v\mid\tau)}{\vartheta_1'(0\mid\tau)}$$

$$=2\omega_1'\ e^{2\eta_1'\omega_1'v'^2}\frac{\vartheta(v'\mid\tau')}{\vartheta_1'(0\mid\tau')} \tag{7.27}$$

式中

$$v=\frac{u}{2\omega_1}\qquad\qquad \tau=\frac{\omega_2}{\omega_1}$$

$$v'=\frac{u}{2\omega_1'}=\frac{u}{2(\alpha\omega_1+\beta\omega_2)}=\frac{v}{\alpha+\beta\tau},$$

$$\tau'=\frac{\gamma+\delta\tau}{\alpha+\beta\tau} \tag{7.28}$$

应用（3.10）式得

$$\left(\frac{\eta_1}{2\omega_1}-\frac{\eta_1'}{2\omega_1'}\right)u^2=\left(\frac{\eta_1}{\omega_1}-\frac{\alpha\eta_1+\beta\eta_2}{\alpha\omega_1+\beta\omega_2}\right)\frac{u^2}{2}$$

$$=\frac{i\beta\tau}{(\alpha+\beta\tau)}\ \frac{u^2}{4\omega_1^2}=\frac{i\beta\pi v^2}{\alpha+\beta\tau}=\frac{i\beta\pi v^2}{\alpha+\beta\tau}$$

由（7.13）知，一级变换时e_k仅是交换位置，故判别式Δ不变，由（3.108）式得

$$\frac{\vartheta_1'(0\mid\tau')}{(\omega_1')^{3/2}}=\varepsilon\ \frac{\vartheta_1'(0\mid\tau)}{\omega_1^{3/2}} \tag{7.29}$$

式中$\varepsilon^8=1$。由（7.27）得

$$\vartheta_1(v'\mid\tau')=\frac{\omega_1}{\omega_1'}\ \frac{\vartheta_1'(0\mid\tau')}{\vartheta_1'(0\mid\tau)}e^{\left(\frac{\eta}{2\omega_1}-\frac{\eta_1'}{2\omega_1'}\right)u^2}\vartheta_1(v\mid\tau)$$

$$=\varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_1'}\ \frac{\omega_1'^{3/2}}{\omega_1^{3/2}}e^{\left(\frac{i\beta\pi v^2}{\alpha+\beta\tau}\right)}\vartheta_1(v\mid\tau)$$

$$=\varepsilon(\alpha+\beta\tau)^{1/2}e^{\left(\frac{i\beta\pi v^2}{\alpha+\beta\tau}\right)}\vartheta_1(v\mid\tau) \tag{7.30}$$

以上是一般形式。对于变换 T_a，$\alpha=\gamma=\delta=1$，$\beta=0$。得 $v'=v$，$\tau'=1+\tau\,(q'=-q=-e^{i\pi\tau})$，(7.30) 式简化为

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau+1)=\varepsilon\vartheta_1(v\,|\,\tau)$$

由 (3.66)～(3.69) 式可以直接得到包括 ε 因子的相同式子如下

$$\vartheta_1(v\,|\,\tau+1)=e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_1(v\,|\,\tau),$$

$$\vartheta_2(v\,|\,\tau+1)=e^{\frac{1}{4}\pi i}\vartheta_2(v\,|\,\tau) \tag{7.31}$$

$$\vartheta_3(v\,|\,\tau+1)=\vartheta_4(v\,|\,\tau),\quad \vartheta_4(v\,|\,\tau+1)=\vartheta(v\,|\,\tau)$$

对于变换 T_b，$\alpha=0$，$\beta=1$，$\gamma=-1$，$\delta=0$，得

$$v'=\frac{v}{\tau},\quad \tau'=-\frac{1}{\tau},\quad \left(\ln q'=\frac{\pi}{\ln q}\right)$$

(7.30) 式变成

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=\varepsilon\tau^{1/2}e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_1(v\,|\,\tau)$$

为了决定 ε，令 $\tau=\tau'=i$，由 (7.29) 式得 $\varepsilon=i^{-3/2}$，从而得

$$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=-i\,(-i\tau)^{1/2}e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_1(v\,|\,\tau) \tag{7.32}$$

依次将 v 换成 $v+\frac{\tau}{2}$，$v+\frac{\tau}{2}-\frac{1}{2}$，$v-\frac{1}{2}$，由(3.67)～(3.69) 式得

$$\vartheta_2\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{1/2}e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_4(v\,|\,\tau) \tag{7.33}$$

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{1/2}e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_3(v\,|\,\tau) \tag{7.34}$$

$$\vartheta_4\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{1/2}e^{i\pi v^2/\tau}\vartheta_2(v\,|\,\tau) \tag{7.35}$$

变换T_b被称作雅各比虚变换，该变换很适合西他函数的数值变换，因为当 τ 很小时 q 接近于1，使$\vartheta_1(v\,|\,\tau)$收敛较慢。但经变换后，$\tau'=-1/\tau$ 的绝对值较大，使$\vartheta_1\left(\frac{v}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right)$ 收敛很快。

关于 ϑ_k 的变换式，可由 (7.33)～(7.35) 式令 $v=0$ 而得到

$$\vartheta_2\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)=(-i\tau)^{1/2}\vartheta_4(0|\tau) \tag{7.36}$$

$$\vartheta_3\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)=(-i\tau)^{1/2}\vartheta_3(0|\tau) \tag{7.37}$$

$$\vartheta_4\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)=(-i\tau)^{1/2}\vartheta_2(0|\tau) \tag{7.38}$$

而 ϑ_1'式由（7.29）式得

$$\vartheta_1'\left(0\left|-\frac{1}{\tau}\right.\right)=(-i\tau)^{3/2}\vartheta_1'(0|\tau) \tag{7.39}$$

§7.3 二 级 变 换

二级变换主要有三种，即所谓朗当变换 T_L，高斯变换 T_G，无理变换 T_I，它们可写成

$$T_L=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad T_G=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\quad T_I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix} \tag{7.40}$$

而后二种变换又可用朗当变换和一次变换表示，即

$$T_G=-T_bT_LT_b,\quad T_I=-T_aT_bT_LT_aT_bT_aT_b \tag{7.41}$$

（1）卫尔斯特拉斯函数

对于朗当变换

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{bmatrix}$$

这是第一周期被 2 除的变换 $\omega_1'=\frac{1}{2}\omega_1$，$\omega_2'=\omega_2$。已知函数 $\mathscr{P}(u)$ 的周期为（$2\omega_1$，$2\omega_2$），格阵为 2Ω，记作 $\mathscr{P}(u|\omega_1,\omega_2)=\mathscr{P}(u|2\Omega)$。经朗当变换后为 $\mathscr{P}\left(u\left|\frac{1}{2}\omega_1,\ \omega_2\right.\right)$。为了得到这个变换结果，考察下列椭圆函数

$$f(u)=\mathscr{P}(u|2\Omega)+\mathscr{P}(u+\omega_i|2\Omega)$$
$$i=1,\ 2,\ 3 \tag{7.42}$$

很明显有 $f(u+\omega_i)=f(u)$，该函数有周期格阵 Ω_i，$2\Omega_i$ 是它

的半格阵。该函数具有二重极点，其无限部分是 $(u-\omega_i)^{-2}$，在 Ω_i 的单位胞腔上无其他极点。故根据刘维尔定律知

$$f(u)=\mathscr{P}(u|\Omega_i)+C \tag{7.43}$$

C 是常数。该函数在平稳点 $\frac{1}{2}\omega_i$，$\frac{1}{2}\omega_i+\omega_j$，$\omega_i(j\neq 1)$ 上的平稳值可以由下式（参见（5.17）式）求得

$$\mathscr{P}(u-w_i)=ei+\frac{(e_i-e_j)(e_i-e_k)}{\mathscr{P}(u)-e_i}=e_i+\frac{d_i^2}{\mathscr{P}(u)-e_i}$$

$$d_i^2=(e_i-e_j)(e_i-e_k)$$

函数格阵是 2Ω。令 $u=\frac{1}{2}\omega_i$（格阵 Ω）得

$$\left[\mathscr{P}\left(\frac{1}{2}\omega_i\right)-e_i\right]^2=d_i^2$$

在格阵 2Ω 的四个点 $\pm\frac{1}{2}\omega_i$，$\pm\left(\frac{1}{2}\omega_i\pm\omega_j\right)$ 上，均满足这个条件。因为 $\frac{1}{2}\omega_i\pm\omega_j=-\frac{1}{2}\omega_i\pm\omega_k$（格阵 2Ω）所以有

$$\mathscr{P}\left(\frac{1}{2}\omega_i\right)=e_i+d_i,\ \mathscr{P}\left(\frac{1}{2}\omega_i+\omega_j\right)=e_i-d_i \tag{7.44}$$

因此得 $f(u)$ 在上述平稳点上的平稳值为 $2(e_i+d_i)$，$2(e_i-d_i)$，$e_i+e_k=-e_i$。它们之和等于 $3e_i$。因为 $\mathscr{P}(u|\Omega_i)$ 的平稳值之和等于零，故 $C=e_i$。最后得

$$\mathscr{P}(u|\Omega_i)=\mathscr{P}(u|2\Omega)+\mathscr{P}(u+\omega_i|2\Omega)-e_i \tag{7.45}$$

这是二级变换的一般公式。对于朗当变换

$$\mathscr{P}\left(u\,\middle|\,\frac{1}{2}\omega_1,\ \omega_2\right)=\mathscr{P}(u|\omega_1,\ \omega_2)$$

$$+\mathscr{P}(u+\omega_1|\omega_1,\ \omega_2)-e_1=\mathscr{P}(u)+\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\mathscr{P}u-e_1}$$

(7.45 A)

对于高斯变换

$$\mathscr{P}\left(u\,|\,\omega_1,\ \frac{1}{2}\omega_2\right)=\mathscr{P}(u\,|\,\omega_1,\ \omega_2)+\mathscr{P}(u+\omega_2|\omega_1,\omega_2)-e_2$$

$$=\mathscr{P}(u)+\frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{\mathscr{P}(u)-e_2} \tag{7.46}$$

对于无理变换

$$\mathscr{P}\left(u\,|\,\omega_1,\ \frac{1}{2}\omega_1+\frac{1}{2}\omega_2\right)=\mathscr{P}(u)+\mathscr{P}(u+\omega_3)-e_3$$

$$=\mathscr{P}(u)+\frac{(e_1-e_3)(e_2-e_3)}{\mathscr{P}(u)-e_3} \tag{7.47}$$

（2）雅各比函数

首先研究朗当变换 T_{L}。类似雅各比函数的一级变换所用的的分析方法，研究二椭圆函数之比

$$\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{u}{M},\ \lambda\right)}{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}$$

函数 x 的周期 $(2K,\ i2K')$，y 的周期 $(2ML,\ i2ML')$，二周期间的变换式为

$$\begin{bmatrix} i2ML' \\ 2ML \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} iK' \\ K \end{bmatrix}$$

$\dfrac{y}{x}$ 是 $\mathrm{sn}^2(u,\ k)$ 的有理函数，在单位胞腔上($2K$，$i2K'$ 作边长组成的平行四边形) $u=K$ 处为二阶零点，$u=K+iK'$ 处为二阶极点，可将 y/x 表示为

$$\frac{y}{x}=\frac{A[1-\mathrm{sn}^2(u,\ k)]}{1-k^2\mathrm{sn}^2(u,\ k)}=A\,\frac{\mathrm{cn}^2(u,\ k)}{\mathrm{dn}^2(u,\ k)}$$

令 $u=0$，iK'，$K/2$ 分别得

$$\frac{1}{M^2}=A,\quad \frac{K^2M^2}{\lambda^2}=\frac{A}{k^2},$$

$$1=A\frac{\mathrm{sn}^2\left(\dfrac{K}{2},\ k\right)\mathrm{cn}^2\left(\dfrac{K}{2},\ k\right)}{\mathrm{dn}^2\left(\dfrac{K}{2},\ k\right)}$$

应用关系式

$$\operatorname{sn}\left(\frac{K}{2},\quad k\right)=\frac{1}{\sqrt{1+k'}},\quad \operatorname{cn}\left(\frac{K}{2},\quad k\right)=\sqrt{\frac{k'}{1+k'}}$$

$$\operatorname{dn}\left(\frac{K}{2},\quad k\right)=\sqrt{k'}$$

由这三个等式得

$$A=(1+k')^2, M=\frac{1}{1+k'},\quad \lambda=\frac{k^2}{(1+k')^2}=\frac{1-k'}{1+k'} \tag{7.48}$$

代入y式中，即得

$$\operatorname{sn}\left[u(1+k'),\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{(1+k')\operatorname{sn}(u,\ k)\operatorname{cn}(u,\ k)}{\operatorname{dn}(u,\ k)} \tag{7.49}$$

另外得

$$\operatorname{cn}\left[u(1+k'),\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u,\ k)}{\operatorname{dn}(u,\ k)} \tag{7.50}$$

$$\operatorname{dn}\left[u(1+k'),\ \frac{1-k'}{1+k'}\right]=\frac{1-(1-k')\operatorname{sn}^2(u,\ k)}{\operatorname{dn}(u,\ k)} \tag{7.51}$$

其次研究高斯变换T_G。变换前后的函数分别是

$$\left.\begin{matrix}\operatorname{sn}\left(\dfrac{u}{M},\ \lambda\right)\\ \operatorname{cn}\left(\dfrac{u}{M},\ \lambda\right)\\ \operatorname{dn}\left(\dfrac{u}{M},\ \lambda\right)\end{matrix}\right\},\ (2ML,\ i2ML');\quad \left.\begin{matrix}\operatorname{sn}(u,\ k)\\ \operatorname{cn}(u,\ k)\\ \operatorname{dn}(u,\ k)\end{matrix}\right\},$$

$$(2K,\ i2K') \tag{7.52}$$

其周期间变换式为

$$\begin{bmatrix} i2ML' \\ 2ML \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} iK' \\ K \end{bmatrix} = T_G \begin{bmatrix} iK' \\ K \end{bmatrix} \tag{7.53}$$

为了求得M和λ，可以用类似朗当变换的过程。但这里采用如下的间接方法（在§7.1的后部分曾陈述过）

因为高斯变换T_G可以看作是一次变换T_b与朗当变换T_L的组合，即$T_G = -T_bT_LT_b$，故（7.53）式变为

$$T_b \begin{bmatrix} i2ML' \\ 2ML \end{bmatrix} = -T_LT_b \begin{bmatrix} iK' \\ K \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

这表明（7.52）式二组函数各自经过一级变换后，二者间存在着朗当变换的关系。根据（7.23）～（7.25）式可以得到（7.52）式中二组函数的一次变换式

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sn}\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right) = i\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{\mathrm{cu}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)} && ①\\
&\mathrm{sn}(iu,\ k') = i\frac{\mathrm{sn}(u,\ k)}{\mathrm{cn}(u,\ k)} && ②\\
&\mathrm{cn}\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right) = \frac{1}{\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)} && ③\\
&\mathrm{cn}(iu,\ k') = \frac{1}{\mathrm{cn}(u,\ k)} && ④\\
&\mathrm{dn}\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right) = \frac{\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)} && ⑤\\
&\mathrm{dn}(iu,\ k') = \frac{\mathrm{dn}(u,\ k)}{\mathrm{cu}(u,\ k)} && ⑥
\end{aligned}\right\} \tag{7.55}$$

以上二组等式的①、③、⑤函数间的朗当变换式可以由(7.48)～(7.51)式得到。由（7.48）式得

$$\lambda' = \frac{1-k}{1+k}, \qquad M = \frac{1}{1+k}$$

$$\lambda = \sqrt{1-\lambda'^2} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$$

由 (7.49)～(7.51) 及 (7.55) 式的②④⑥部分得

$$\mathrm{sn}\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right) = \frac{1}{M}\ \frac{\mathrm{sn}(iu,\ k')\mathrm{cn}(iu,\ k')}{\mathrm{dn}(iu,\ k')}$$

$$\mathrm{cn}\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right) = \frac{1-(1+k)\mathrm{sn}^2(iu,\ k')}{\mathrm{dn}(iu,\ k')}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{iu}{M},\ \lambda'\right) = \frac{1-(1-k)\mathrm{sn}^2(iu,\ k')}{\mathrm{dn}(iu,\ k')}$$

再利用 (7.55) 式最后得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right) &= \frac{1}{M}\ \frac{\mathrm{sn}(u,\ k)}{1+k\mathrm{sn}^2(u,\ k)} \\ \mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right) &= \frac{\mathrm{cn}(u,\ k)\mathrm{dn}(u,\ k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u,\ k)} \\ \mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right) &= \frac{1-k\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{1+k\,\mathrm{sn}^2(u,\ k)} \end{aligned}\right\} \qquad (7.56)$$

（3）西他函数

我们仅研究西他函数的朗当变换，有

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \omega_2' \end{bmatrix}$$

故 $\omega_1' = \frac{1}{2}\omega_1$，$\omega_2' = \omega_2$。因此西他函数变量

$$v' = 2v, \quad \tau' = 2\tau, \quad v = \frac{u}{2\omega_1}, \quad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

现在来推导变换后 $\vartheta_i(2v|2\tau)$（$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$）及 $\vartheta_i(0|2\tau)$（$i=2,\ 3,\ 4$）的表示式。

应用 (3.92)，(3.93) 式得

$$\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau) = \prod_{n=\infty}^{\infty}(1-q^{2n})^2(1+q^{2n-1})^2$$

$$\cdot(1-q^{2n-1})^2 = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^2(1-q^{4n-2})^2$$

$$=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})(1-q^{4n-2})^2(1-q^{4n-2})\right\}^2$$

$$=[\vartheta_4(0|2\tau)]^2$$

得

$$\vartheta_4(0|2\tau)=[\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau)]^{1/2} \qquad (7.57)$$

由 (3.67)～(3.69) 式得

$$\vartheta_3(v|\tau)+\vartheta_4(v|\tau)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{4n}e^{4n2\pi vi}=2\vartheta_3(2v|4\tau) \qquad (7.58)$$

$$\vartheta_3(v|\tau)-\vartheta_4(v|\tau)=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{4\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}e^{2(2n-1)\pi vi}$$

$$=2\vartheta_2(2\vartheta_2|4\tau) \qquad (7.59)$$

将上二式相乘，令 $v=0$，并代入 (3.91)～(3.92) 式得

$$\vartheta_3^2(0|\tau)-\vartheta_4^2(0|\tau)=4\vartheta_2(0|4\tau)\vartheta_3(0|4\tau)$$

$$=8q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})^2(1+q^{8n})^2(1+q^{8n-4})^2$$

$$=8q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{8n})^2(1+q^{4n})^2$$

$$=8q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{4n})^2(1+q^{4n})^4=2\vartheta_2(0|2\tau)$$

即

$$\vartheta_2(0|2\pi)=2^{-1/2}[\vartheta_3^2(0|\tau)-\vartheta_4^2(0|\tau)]^{1/2} \qquad (7.60)$$

由 (7.57) 和 (7.60) 式

$$[\vartheta_3^2(0|\tau)+\vartheta_4^2(0|\tau)]^2$$

$$=[\vartheta_3^2(0|\tau)-\vartheta_4^2(0|\tau)]^2$$

$$+4\vartheta_3^2(0|\tau)\vartheta_4^2(0|\tau)$$

$$=4[\vartheta_2^4(0|2\tau)+\vartheta_4^4(0|2\tau)]$$

$$=4\vartheta_3^4(0|2\tau)$$

以上应用了（3.82）式，且考虑到当 $q\to 0$ 时的性质，从而得

$$\vartheta_3(0|2\tau)=2^{-1/2}[\vartheta_3^2(0|\tau)+\vartheta_4^2(0|\tau)]^{1/2} \qquad (7.61)$$

由 $\vartheta_1'=\pi\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4$ 得

$$\vartheta_1'(0|2\tau)=\frac{\pi}{2}(\vartheta_4^3(0|\tau)-\vartheta_4^4(0|\tau))\vartheta_3(0|\tau)$$

$$\cdot\vartheta_4(0|\tau)]^{1/2}=\frac{1}{2}\pi^{1/2}[\vartheta_2^3(0|\tau)\vartheta_1'(0|\tau]^{1/2}$$

$$=\frac{1}{2}\ \frac{\vartheta_2(0|\tau)\vartheta_1'(0|\tau)}{[\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau)^{1/2}} \qquad (7.62)$$

为了得到 $\vartheta_r(2v|2\tau)$ 的表示式，先证明下式

$$\frac{\vartheta_3(v|\tau)\vartheta_4(v|\tau)}{\vartheta_4(2v|2\tau)}=\frac{\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_4(0|2\tau)} \qquad (7.63\text{A})$$

上式左边函数有二个周期 $v=\frac{1}{2}$，τ，其分子分母的零点均为 $v=\frac{\tau}{2}+\frac{m}{2}$（$m=0,1,2,\cdots$），故相约去。根据双周期函数的基本性质（§1.2）知左边必是一个常数，该常数可由 $v=0$ 而得到，即是上式的右边因子，故上式成立。将(7.57)式代入则得

$$\vartheta_4(2v|2\tau)=\frac{\vartheta_3(v|\tau)\vartheta_4(v|\tau)}{\vartheta_4(0|2\tau)} \qquad (6.63\text{B})$$

在（7.63A）式中，将 v 变成 $v+\frac{\tau}{2}$，得

$$\frac{\vartheta(v|\pi)\vartheta_2(v|\tau)}{\vartheta_1(2v|2\tau)}=\frac{\vartheta_3(0|\tau)\vartheta_4(0|\tau)}{\vartheta_4(0|2\tau)} \qquad (7.64\text{A})$$

得

$$\vartheta_1(2v|2\tau)=\frac{\vartheta_1(v|\tau)\vartheta_2(v|\tau)}{\vartheta_4(0|2\tau)} \qquad (7.64\text{B})$$

同理可证明

$$\frac{\vartheta_3^2(v|\tau)+\vartheta_4^2(v|\tau)}{\vartheta_3(2v|2\tau)}=\frac{\vartheta_3^2(0|\tau)+\vartheta_4^2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|2\tau)} \qquad (7.65\text{A})$$

$$\vartheta_3(2v|2\tau)=\frac{\vartheta_3^2(v|\tau)+\vartheta_4^2(v|\tau)}{2\vartheta_3(0|2\tau)} \qquad (7.65\,B)$$

将（7.65 A）中 v 变成 $v+\frac{\tau}{2}$，得

$$\frac{\vartheta_2^2(v|\tau)-\vartheta_1^2(v|\tau)}{\vartheta_2(2v|2\tau)}=\frac{\vartheta_3^2(0|\tau)+\vartheta_4^2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|2\tau)} \qquad (7.66\,A)$$

$$\vartheta_2(2v|2\tau)=\frac{\vartheta_2^2(v|\tau)-\vartheta_1^2(v|\tau)}{2\vartheta_3(0|2\tau)} \qquad (7.66\,B)$$

§7.4 三 级 变 换

（1）卫尔斯特拉斯函数

设格阵 2Ω 的生成元（$2\omega_j$，$2\omega_k$）是 $2\omega_1$，$2\omega_2$，$2\omega_3$ 中的任二个。我们研究最普通的三级变换

$$\begin{bmatrix} 2\omega_j \\ 2\omega_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2\omega_j' \\ 2\omega_k' \end{bmatrix} \qquad (7.67)$$

$2\omega_j'=\frac{2}{3}\omega_j$，$2\omega_k'=2\omega_k$，这是一个周期除以 3 的变换。设由 $\left(\frac{2}{3}\omega_j,\ 2\omega_k\right)$ 生成格阵 $\frac{2}{3}\Omega'$。变换前后的卫尔斯特拉斯函数分别是

$$\mathscr{P}(u|2\Omega); \qquad \mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega'\right.\right)$$

$$(2\omega_j,\ 2\omega_k); \qquad \left(\frac{2}{3}\Omega_j,\ 2\omega_k\right)$$

为了求得 $\mathscr{P}\left(u\,\frac{2}{3}\Omega'\right)$ 的表示式，采用类似建立（7.42）～（7.43）式的分析过程，因而得

$$\mathscr{P}(u|2\Omega)+\mathscr{P}\left(u+\frac{2}{3}\omega_j|2\Omega\right)+\mathscr{P}\left(u-\frac{2}{3}\omega_j|2\Omega\right)$$

$$=\mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega'\right.\right)+C \qquad (7.68)$$

式中C是常数。式中左方第二，第三项可以应用函数的加法公式将其简化。由（5.9）式得

$$\mathscr{P}(u+v)+\mathscr{P}(u-v)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(\mathscr{P}'u)^2+(\mathscr{P}'v)^2}{(\mathscr{P}u-\mathscr{P}v)^2}-2(\mathscr{P}u+\mathscr{P}v)$$

令$y=\mathscr{P}u$，$z=\mathscr{P}v$，并应用$y'=(4y^3-g_2y-g_3)^{1/2}$，$z'=(4z^3-g_2z-g_3)^{1/2}$，上式化简为

$$\mathscr{P}(u+v)+\mathscr{P}(u-v)=\frac{(y+z)\left(2yz-\frac{1}{2}g_2\right)-g_3}{(y-z)^2} \tag{7.69}$$

令

$$x=\mathscr{P}(u|2\Omega),\quad p_j=\mathscr{P}\left(\frac{2}{3}\omega_j\right),\quad j=1,2,3,4$$

$$(\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3=-\omega_1-\omega_2,\ \omega_4=\omega_1-\omega_2)$$

由（7.68），（7.69）式得

$$\mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)+C=x+\frac{(x+P_j)\left(2P_jx-\frac{1}{2}g_2\right)-g_3}{(x-P_j)^2}$$

$$=x+2P_j+\frac{6P_j^2-\frac{1}{2}g_2}{x-P_j}+\frac{4P_j^3-g_2P_j-g_3}{(x-P_j)^2} \tag{7.70}$$

因此该函数的平稳值e_k'出现在子格阵$\frac{2}{3}\Omega^j$的半周期点w_k'（$k=1, 2, 3$）上。令$x=e_k$，根据e_1，e_2，e_3的对称性可以得到如下等式

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{(e_k-x_j)^2}=\frac{-12x_j^2+g_2}{4x_j^3-g_2x_j-g_3}$$

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{(e_k-x_j)^2}=\frac{48x_j^4+24g_3x_j+g_2^2}{(4x_j^3-g_2x_j-g_3)^2}$$

由于三个平稳值之和等于0，利用上二等式，由（7.70）式得

$$3C=6P_j-\frac{24g_j^4-12g_2P_j^2-24g_3P_j-\frac{1}{2}g_2^2}{4P_j^3-g_2P_j-g_3}=6P_j$$

因为 P_j 是四次方程 $x^4=\frac{1}{2}g_2x^2-g_3x-\frac{1}{48}g_2^2=0$ 的根，故上式第二项消失，从而得 $C=2P_j$。这样就得到三级变换的表示式

$$\mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)=\frac{x^3-2P_jx^2+\left(7P_j^2-\frac{1}{2}g_2\right)x-\left(2P_j^3+\frac{1}{2}g_2P_j+g_3\right)}{(x-P_j)^2} \tag{7.71}$$

$x=\mathscr{P}(u|2\Omega)$，　　$P_j=\mathscr{P}\left(\frac{2}{3}\omega_j\right)$，$j=1,2,3$

将此式直接求导可以得到

$$\mathscr{P}'\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)=\frac{x^3-3P_jx^2-\left(3P_j^2-\frac{1}{2}g_2\right)x-\left(3P_j^3-\frac{3}{2}g_2P_j-2g_3\right)}{(x-P_j)^3}\mathscr{P}'(u|2\Omega) \tag{7.72}$$

函数 $\mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)$ 满足下列微分方程

$$\left[\mathscr{P}'\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)\right]^2=4\left[\mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)\right]^3-G_2\mathscr{P}\left(u\left|\frac{2}{3}\Omega^j\right.\right)-G_3$$

G_2, G_3 是格阵 $\frac{2}{3}\Omega^j$ 的不变量。可以直接将（7.71），（7.72）式代入上式，得到关于 x 的9次多项式，根据 x^7 和 x^6 的系数即可得到

$$G_2=120P_i^2-9g_2$$
$$G_3=280P_i^3-42g_2P_i-27g_3 \tag{7.73}$$

（2）雅各比函数

研究具有下列关系式的二椭圆函数

$$y=\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right) \qquad x=\mathrm{sn}(u,\ k)$$
$$(4ML,\ i2ML') \qquad (4K,\ i2K')$$
$$\begin{bmatrix} iK' \\ K \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} iML' \\ ML \end{bmatrix} \tag{7.74}$$
$$L=\frac{K}{M}, \qquad L'=\frac{K'}{3M}$$

因为

$$\mathrm{sn}(u+2mK+i2nK',\ k)=(-1)^m\mathrm{sn}(u,\ k)$$
$$\mathrm{sn}\left(\frac{u+2mK+i2nK'}{M},\ \lambda\right)=(-1)^m\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)$$

故二函数之比y/x的周期为$2K$，$i2K'$。在单位胞腔内，其一阶零点为$u=\frac{1}{3}i2K'$，而一阶极点是$u=\frac{1}{3}iK$。并且y/x是$\mathrm{sn}^2(u,\ k)$的有理函数。因此有

$$\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{\mathrm{sn}(u,\ k)}=\frac{1}{M}\ \frac{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}iK',\ k\right)}}{1-\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}inK',\ k\right)}} \tag{7.75}$$

令$u=K$得

$$M=\frac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{2}{3}iK',\ k'\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}iK',\ k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}iK',\ k'\right)\mathrm{cn}^2\left(\frac{1}{3}iK',\ k\right)}$$

利用雅各比虚变换式（7.23）和（7.24）式得

$$\frac{\mathrm{sn}(iu,\ k)}{\mathrm{cn}(iu,\ k)}=i\,\mathrm{sn}(u,\ k')$$

据此M可以表示为

$$M=\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}iK',\ k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}iK',\ k\right)} \tag{7.76}$$

为了求得λ，在（7.75）式中令$u=K+\frac{1}{3}iK'=ML+iML'$，因为

$$\mathrm{sn}(L+iL',\lambda)=\frac{1}{\lambda}$$

$$\mathrm{sn}\left(K+\frac{1}{3}iK',\ k\right)=\frac{1}{\mathrm{dn}\left(\frac{1}{3}K',\ k'\right)}$$

和（7.23）式得

$$\frac{\mathrm{dn}\left(\frac{1}{3}K',\ k'\right)}{\lambda}=\frac{1}{M}$$

$$\cdot\frac{1+\dfrac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{2}{3}K',\ k'\right)}{\mathrm{dn}^2\left(\frac{1}{3}K',k'\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}K',k'\right)}}{1+\dfrac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{1}{3}K',\ k'\right)}{\mathrm{dn}^2\left(\frac{1}{3}K',\ k'\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}K',k'\right)}}$$

$$\lambda=\mathrm{dn}\left(\frac{1}{3}K',\ k'\right)$$

$$\cdot\frac{\mathrm{cn}^2\left(\frac{1}{3}K',k'\right)+\mathrm{dn}^2\left(\frac{1}{3}K',k'\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{1}{3}K',k'\right)}{\mathrm{cn}^2\left(\frac{2}{3}K',k'\right)+\mathrm{dn}^2\left(\frac{1}{3}K',k'\right)\mathrm{sn}^2\left(\frac{2}{3}K',k'\right)}$$

因为

$$\mathrm{cn}^2\alpha+\mathrm{dn}^2\beta\cdot\mathrm{sn}^2\alpha=1-k^2\mathrm{sn}\alpha\cdot\mathrm{sn}^2\beta$$

将 k，$\mathrm{sn}\alpha$，$\mathrm{sn}\beta$ 均用关于西他函数的表示式，并考虑到（5.57）式得

$$\mathrm{cn}^2\alpha+dn^2\beta\mathrm{sn}^2\alpha=\frac{\vartheta_4^2\vartheta_4(\alpha+\beta)\vartheta_4(\alpha-\beta)}{\vartheta_4^2(\alpha)\vartheta_4^2(\beta)}$$

另外

$$\mathrm{dn}\left(\frac{1}{3}K',k'\right)=\frac{\vartheta_4(0|\tau')\vartheta_4\left(\frac{3\pm1}{3}K'|\tau'\right)}{\vartheta_4(K'|\tau')\vartheta_4\left(\frac{1}{3}K'|\tau'\right)}$$

将以上结果代入到 λ 的式子中，得

$$\lambda=\frac{\vartheta_4^2\left(\frac{2}{3}K',\ k'\right)}{\vartheta_4^2\left(\frac{1}{3}K',\ k'\right)} \tag{7.77}$$

§7.5 n 级变换

主要的 n 级变换是函数周期之一乘以数 n 或除以数 n，n 可能是偶数，也可能是奇数。

先分析雅各比函数。虚数周期被 3 除的变换已在（7.75）式中给出，用相似的分析方法，可以得到 n 级变换，设

$$L=\frac{K}{M},\qquad L'=\frac{K'}{nM}$$

函数

$$\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)}{\mathrm{sn}(u,\ k)}$$

的周期为 $2K$，$i2K'$，在单位胞腔内的一阶零点是

$$u=\frac{iPK'}{n}\left(P=\pm2,\ \pm4,\ \cdots,\ \pm2\left[\frac{n}{2}\right]\right)$$

而一阶极点是

$$u=\frac{iQK'}{n}\left(Q=\pm 1,\ \pm 3,\cdots,\pm\left(2\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\right)$$

由此得

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\operatorname{sn}(u,\ k)$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2(u,\ k)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{i2l}{n}K',\ k\right)}}{1-\dfrac{\operatorname{sn}^2(u,\ k)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2l-1}{n}iK',\ k\right)}}\cdot \tag{7.78}$$

式中M和λ为

$$M=\prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2l-1}{n}K',\ k'\right)}{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{2l}{n}K',\ k'\right)} \tag{7.79}$$

$$\lambda=\left\{\prod_{l=1}^{n}\frac{\vartheta_4\left(\dfrac{2l}{n}K'|\tau'\right)}{\vartheta_4\left(\dfrac{2l-1}{n}K'|\tau'\right)}\right\}^2 \tag{7.80}$$

又令

$$c_l=\frac{\operatorname{sn}^2\left(\dfrac{lK'}{n},\ k'\right)}{\operatorname{cn}^2\left(\dfrac{lK'}{n},\ k'\right)}\qquad d_l=\operatorname{dn}^2\left(\frac{lK'}{n},\ k'\right) \tag{7.81}$$

得

$$\operatorname{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)=\frac{1}{M}\operatorname{sn}(u,\ k)$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1+\dfrac{\operatorname{sn}^2(u,\ k)}{c_{2l}}}{1+\dfrac{\operatorname{sn}^2(u,\ k)}{c_{2l}-1}} \tag{7.82}$$

这个式子适用于 n 是偶数或奇数

对于函数$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)$，$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)$，则分二种情形。当 n 是奇数时

$$\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)=\mathrm{cn}(u,\ k)$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-d_{2l}\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{c_{2l}-1}} \tag{7.83}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)=\mathrm{dn}(u,\ k)$$

$$\cdot\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{1-d_{2l-1}\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{c_{2l-1}}} \tag{7.84}$$

当 n 是偶数时

$$\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)=\mathrm{cn}(u,\ k)\mathrm{dn}(u,\ k)$$

$$\cdot\frac{\prod_{l=1}^{\frac{n}{2}-1}1-d_{2l}\mathrm{sn}^2(u.\ k)}{\prod_{l=1}^{\frac{n}{2}}1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{c_{2l-1}}} \tag{7.85}$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M},\ \lambda\right)=\prod_{l=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1-d_{2l-1}\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{1+\dfrac{\mathrm{sn}^2(u,\ k)}{c_{2l-1}}} \tag{7.86}$$

雅各比函数的实数周期被 n 除的变换，可以用相似的分析，其主要结果是

$$L=\frac{K}{nM},\qquad L'=\frac{K'}{M}$$

$$M = \prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{c_{2l-1}}{c_{2l}} \qquad \lambda = k^n \prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} c_{2l-1}^2 \tag{7.87}$$

$$c_l = \mathrm{sn}^2\left(\frac{lK}{n}, \ k\right)$$

当 n 是奇数时

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M}, \ \lambda\right) &= \frac{1}{M}\mathrm{sn}(u, \ k) \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{sn}^2(u, \ k)}{c_{2l}}}{1 - kc_{2l}\mathrm{sn}^2(u, \ k)} \\
\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M}, \ \lambda\right) &= \mathrm{cn}(u, \ k) \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{sn}^2(u, \ k)}{c_{2l-1}}}{1 - k^2 c_{2l}\mathrm{sn}^2(u, k)} \\
\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M}, \ \lambda\right) &= dn(u, \ k) \prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1 - k^2 c_{2l-1}\mathrm{sn}^2(u, k)}{1 - k^2 c_{2l}\mathrm{sn}^2(u, \ k)}
\end{aligned}\right\} \tag{7.88}$$

当 n 是偶数时

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M} + L, \ \lambda\right) &= \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{sn}^2(u, \ k)}{c_{2l-1}}}{1 - k^2 c_{2l-1}\mathrm{sn}^2(u, \ k)} \\
\mathrm{cn}\left(\frac{u}{M} + L, \ \lambda\right) &= -\frac{\lambda'}{M} \frac{\mathrm{sn}(u, \ k)}{\mathrm{cn}(u, \ k)} \\
&\cdot \prod_{l=1}^{\frac{2}{n}} \frac{1 - \dfrac{\mathrm{sn}^2(u, \ k)}{c_{2l}}}{1 - k^2 c_{2l-1}\mathrm{sn}^2(u, \ k)} \\
\mathrm{dn}\left(\frac{u}{M} + L, \ \lambda\right) &= \frac{\lambda'}{\mathrm{dn}(u, k)} \cdot \prod_{l=1}^{\frac{n}{2}} \frac{1 - k^2 c_{2l}\mathrm{sn}^2(u, k)}{1 - k^2 c_{2l-1}\mathrm{sn}^2(u, k)}
\end{aligned}\right\} \tag{7.89}$$

下面分析西他函数的 n 级变换，当周期 $\omega_1' = \dfrac{1}{n}\omega_1$, $\omega_2' = \omega_2$

时，有 $v'=nv$，$\tau'=n\tau$，$q'=q^n$。先研究 $\vartheta_4(nv|n\tau)$。因为

$$\vartheta_4(v|\tau)=G(q)\prod_{r=1}^{\infty}(1-2q^{2r-1}\cos 2\pi v+q^{4r-2}) \tag{7.90}$$

$$G(q)=\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2r}) \tag{7.91}$$

将 v 和 τ 变成 nv 和 $n\tau$，得

$$\vartheta_4(nv|n\tau)=G(q^n)\prod_{r=1}^{\infty}(1-2q^{2nr-n}\cos 2n\pi v+q^{4nr-2n})$$

$$=G(q^n)\prod_{r=1}^{\infty}(1-q^{2nr-n}e^{2n\pi vi})(1-q^{2nr-n}e^{-2n\pi vi})$$

利用下列关系式

$$\prod_{r=0}^{p-1}(1-ae^{\pm i2r\pi/p}=1-a^p$$

得

$$(1-q^{2nr-n}e^{2n\pi vi})(1-q^{2nr-n}e^{-2n\pi vi})$$

$$=\prod_{s=1}^{n-1}(1-q^{2r-1}e^{2\pi vi}e^{-i2s\pi/n})(1-q^{2r-1}e^{-\pi vi}e^{-i2s\pi/n})$$

$$=\prod_{s=1}^{n-1}(1-2q^{2r-1}\cos(2\pi v+2s\pi/n)+q^{4r-2})$$

代入 ϑ_4 式得

$$\vartheta_4(mv|n\tau)=G(q^n)\prod_{r=1}^{\infty}\prod_{s=0}^{n-1}\{1-2q^{2r-1}\cos(2\pi v$$

$$+2s\pi/n)+q^{4r-2}\}=\frac{G(q^n)}{[G(q)]^n}\prod_{s=0}^{n-1}$$

$$\cdot\vartheta_4(v+s\pi/n|\tau) \tag{7.92}$$

类似地分析得

$$\vartheta_i(nv|n\tau)=\frac{G(q^n)}{[G(q)]^n}\prod_{s=0}^{n-1}\vartheta_i(v+s\pi/n|\tau) \qquad (7.93)$$

$$i=1,\ 2,\ 3$$

另一种 n 阶变换是 $\omega_1'=\omega_1$, $\omega_2'=\frac{1}{n}\omega_2$, 对应 $v'=v$, $\tau'=\frac{1}{n}\tau$, $q'=q^{\frac{1}{n}}$, 得

$$\vartheta_i\left(v\left|\frac{\tau}{n}\right.\right)\frac{G(q^{\frac{1}{n}})}{G(q)]^n}\prod_{s=-\frac{1}{2}(n-1)}^{\frac{1}{2}(n-1)}\vartheta_i(v-is\ln q/n)$$

(7.94)

利用雅各比函数的西他函数表示式，也可以得到相应的雅各比函数的 n 级变换式。

第八章 椭圆模函数

本章介绍单变量模函数的基本知识，包括不变量，模群，模变换等概念，并具体研究了二个模函数 $J(\tau)$ 和 $\lambda(\tau)$，指出它们之间及其与二阶椭圆函数间的关系。

§8.1 不 变 量

（1）四次多项式的不变量

三次多项式的标准形式是卫尔斯托拉斯形式

$$W(x)=4x^3-g_2x-g_3 \tag{8.1}$$

今取一任意的四次无重根的多项式

$$f(x)=a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4 \tag{8.2}$$

在 $a_0\neq 0$ 的条件下，若将其变成标准形（8.1），需作下列的分式线性变换

$$z=\alpha+\cfrac{1}{\cfrac{x}{b_1}-\cfrac{b_2}{2b_1}}$$

式中 α 是 $f(x)$ 的一个已知的根。经过初等但冗长的计算后，可以将变换后的系数 g_2，g_3，用变换前的系数 a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 表示，即

$$\left.\begin{aligned}g_2&=a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2\\ g_3&=a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_0a_3^2-a_1^2a_4-a_2^3\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

若用下式

$$\varphi(x_1,\ x_2)=a_0x_1^4+4a_1x_1^3x_2+6a_2x_1^2x_2^2+4a_3x_1x_2^3+a_4x_2^4 \tag{8.4}$$

替代（8.2）式，并按下列线性变换式变成新的变量 y_1，y_2

$$x_1 = \alpha y_1 + \beta y_2$$
$$x_2 = \gamma y_1 + \delta y_2 \tag{8.5}$$

式中 α，β，γ，δ 为常数，并有

$$D = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

令

$$\varphi(x_1,\ x_2) = \psi(y_1,\ y_2)$$
$$\psi(y_1,\ y_2) = b_0 y_1^4 + 4b_1 y_1^3 y_2 + 6b_2 y_1^2 y_2^2 + 4b_3 y_1 y_2^3 + b_4 y_2^4$$

经计算，得出

$$\left.\begin{aligned} & b_0 b_4 - 4b_1 b_3 + 3b_2^2 = D^4(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2) \\ & b_0 b_2 b_4 + 2b_1 b_2 b_3 - b_0 b_3^2 - b_1^2 b_4 - b_2^3 \\ & \quad = D^6(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4 - a_2^3) \end{aligned}\right\} \tag{8.6}$$

以上二种情况意味着将任意线性变换

$$\phi x = \frac{ax + b}{cx + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

代入（8.2）式，得到新的四次多项式

$$\begin{aligned} \phi(x) &= b_0 x^4 + 4b_1 x^3 + 6b_2 x^2 + 4b_3 x + b_4 \\ &= (cx + d)^4 f(\phi x) \end{aligned}$$

因此下列等式成立

$$G_k(b_0,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4) = (ad - bc)^m G_k(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4)$$
$$m = 2k;\quad k = 2,\ 3 \tag{8.7}$$

式中 G_k 具有（8.6）式中的形式。我们将 G 称为（8.7）式关于变换 ϕx，而权为 m 的相对不变量。可以看到 G_2^3/G_3^2 是不变的，它不仅关于 ϕx 不变，而且用任意一个非零的常数乘 $f(x)$ 时，也不改变。由（8.6）和（8.3）式可以看出，g_2 和 g_3 是相对不变量，其权各等于 4 和 6。进一步可以看出

$$J = \frac{g_2^3}{g_2^3 - 27g_3^2} \tag{8.8}$$

是绝对不变量。

（2）不变量与等价格阵

由（2.4）和（2.7）式，并令

$$\tau = \frac{\omega'}{\omega}$$

则得

$$g_2 = 60 \sum_{m,\ n}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^4} = \frac{60}{(2\omega)^4} \sum_{m,\ n}{}' \frac{1}{(m + n\tau)^4} \tag{8.9}$$

$$g_3 = 140 \sum_{m,\ n}{}' \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^6} = \frac{140}{(2\omega)^6} \sum_{m,\ n} \frac{1}{(m + n\tau)^4}$$

这样就将 g_2，g_3 表示成以 ω，ω' 为生成元的格阵 Ω 的关系式。由§1.4的分析知，格阵的生成元不是唯一的，例如用ω，ω' 的下列线性组合

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\omega' + \beta\omega \\ \omega_1 &= \gamma\omega' + \delta\omega \\ \alpha\delta - \beta\gamma &= \pm 1 \end{aligned} \tag{8.10}$$

所得到生成元 ω_1，ω_1'，生成格阵 Ω_1，并有$\Omega = \Omega_1$，即Ω_1 和Ω，$(\omega,\ \omega')$ 和 $(\omega_1,\ \omega_1')$ 是等价的。这种等价性表现在 g_2，g_3 的不变性上。关于这一点是很易从（8.9）式看出的，因为实施变换（8.10）式，只是改变级数各项次序而已。但如用生成元$(t\omega,\ t\omega')$ 替代 $(\omega,\ \omega')$ 时（二个格阵相似），由（8.9）式可以看出

$$g_2(t\omega,\ t\omega') = \frac{1}{t^4} g_2(\omega,\ \omega')$$

$$g_3(t\omega,\ t\omega') = \frac{1}{t^6} g_3(\omega,\ \omega')$$

此时 g_2，g_3 改变了，但 $J = g_2^3/(g_2^3 - 27_3^2)$ 仍不改变。

由此可见，在等价格阵中，g_2，g_3，J 不变；在相似格阵中，虽然 g_2，g_3 产生变化，但 J 不变。

（3）模函数，模变换和模群的概念

以上从多项式变量的线性变换，以及生成元的线性变换角度考察了相对变量 g_2，g_3 及绝对不变量 J。然而这个绝对不变量

J 却是比值 $\tau = \omega'/\omega$ 的函数，可写作

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2} \tag{8.11}$$

式中 g_2，g_3 不仅是 τ 的函数，也是ω 的函数（见（8.9）式），但唯独 $J(\tau)$ 仅是一个变量 τ 的函数。由（8.10）式和以上分析知，对于下列 τ 的线性变换

$$\tau'=\frac{\omega_1'}{\omega_1}=\frac{\alpha\omega'+\beta\omega}{\gamma\omega'+\delta\omega}=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\text{，}\alpha\delta-\beta\gamma=1 \tag{8.12}$$

$J(\tau)$ 保持不变，即有

$$J(\tau')=J\left(\frac{2\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=J(\tau)$$

将 $\tau'-\tau$ 间的线性变换(8.12)称作**模变换**，关于模变换为不变的解析函数称作**模函数**，后面将要证明 $J(\tau)$ 是解析函数，故 $J(\tau)$ 是一个模函数。因为满足 $\alpha\beta-\gamma\beta=1$ 之整数 α，β，γ，δ 有无限组，故模变换有无限个，这些模变换的集合形成一个群，称为**模群**。满足模变换 $\tau'=(\alpha\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$ 的 τ 和 τ' 对于此模群称为**等价**。

§8.2 模 变 换

用字母 S，T，…表示模变换。例如

$$\tau'=S\tau,\qquad S=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix},\qquad 2\delta-\beta\gamma=1 \tag{8.13}$$

这表示

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\beta}$$

模变换有下列几个性质；

（i）若 S 是模变换，则 $-S$ 也是模变换，即

$$S=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha & -\beta\\ -\gamma & -\delta\end{bmatrix}=-S$$

(ii) 么变换 I 也是模变换

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

得

$$\tau'=I\tau=\tau$$

(iii) 若 S 是模变换，其逆变换也是模变换。

因为

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

则

$$\tau=\frac{\delta\tau'-\beta}{-\gamma\tau'+\alpha}=\frac{-\delta\tau'+\beta}{\gamma\tau'-\alpha}$$

的变换用 S^{-1} 表示

$$S^{-1}=\begin{bmatrix}\delta & -\beta\\ -\gamma & \alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\delta & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$$

将 S^{-1} 称作 S 的逆变换，易见这个逆变换也是模变换，并有

$$SS^{-1}=\begin{bmatrix}\alpha\delta-\beta\gamma & -\alpha\beta+\alpha\beta\\ \gamma\delta-\gamma\delta & -\beta\gamma+\alpha\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

(iv) 若对 τ 连续施以变换 S_1，S_2 的 τ'，则总变换 $S=S_2S_1$，并有 $\tau'=S\tau$。为了证明这个结果，令

$$S_1=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_2\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}\qquad S_2=\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix}$$

先对 τ 施行变换 S_1 得 τ_1

$$\tau_1=S_1\tau=\frac{\alpha_1\tau+\beta_1}{\gamma_1\tau+\delta_1}$$

再对 τ_1 施行变换 S_2，得 τ'

$$\tau'=S_2\tau_1=\frac{\alpha_2\tau_1+\beta_2}{\gamma_2\tau_1+\delta_2}=\frac{\alpha_2(\alpha_1\tau+\beta_1)+\beta_2(\gamma_1\tau+\delta_1)}{\gamma_2(\alpha_1\tau+\beta_1)+\delta_2(\gamma_1\tau+\delta_1)}$$

$$=\frac{(\alpha_2\alpha_1+\beta_2\gamma_1)\tau+(\alpha_2\beta_1+\beta_2\delta_1)}{(\gamma_2\alpha_1+\delta_2\gamma_1)\tau+(\gamma_2\beta_1+\delta_2\delta_1)}$$

可见总矩阵

$$S=\begin{bmatrix}\alpha_2\alpha_1+\beta_2\gamma_1 & \alpha_2\beta_1+\beta_2\delta_1\\ \gamma_2\alpha_1+\delta_2\gamma_1 & \gamma_2\beta_1+\delta_2\delta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}$$
$$=S_2S_1$$

并有

$$\tau'=S_2\tau_1=S_2S_1\tau=S\tau$$

注意 $S_1S_2\neq S_2S_1$，即变换矩阵的乘法运算不服从交换律。故必须将变换自右边的乘积与变换自左边的乘积区别开来。

由此可见，若对 τ 连续施以变换 S_1，S_2，…，S_n，则总变换

$$S=S_n\cdots S_2S_1$$

特别是当 $S_1=S_2=\cdots=S_n$ 时，有

$$S=S_1^n$$

如再对结果施以变换 m 次，则总变换为

$$S=S_1^mS_1^n=S_1^{m+n}$$

另外很容易看出 $S_3(S_2S_1)=(S_3S_2)S_1$，故一般可去掉括号。

有了以上关于模变换的基本知识，现在来证明模群的一个重要性质。即模群全体是由下列二个基本变换产生的

$$S\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\tag{8.14}$$

即

$$\tau'=\tau+1\qquad \tau'=-\frac{1}{\tau}$$

今取模群中的任意变换

$$M=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}$$

由模变换的乘法原理可得

$$MS^{\pm1}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \pm1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\pm\alpha\\ \gamma & \delta\pm\gamma\end{bmatrix}$$

$$MS^{\mp n}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\pm n\alpha\\ \gamma & \delta\pm n\gamma\end{bmatrix}$$

$$MT=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta & -\alpha\\ \delta & -\gamma\end{bmatrix}$$

先选择一个整数 n，使下列变换

$$M_1=MS^{-n}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta-n\alpha\\ \gamma & \delta-n\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_1 & \delta_1\end{bmatrix}$$

满足

$$|\beta_1|<|\alpha_1| \quad 即 \quad |\beta-n\alpha|<|\alpha|$$

若 $\beta_1\neq 0$，再选一整数 m，用变换 TS^{-m} 右乘 M_1，使结果变换

$$M_2=M_1TS^{-m}=\begin{bmatrix}\beta_1 & -\alpha_1-m\beta_1\\ \delta_1 & -\gamma_1-m\delta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_2 & \delta_2\end{bmatrix}$$

满足

$$|\beta_2|<|\alpha_2|, \quad |\alpha_1+m\beta_1|<|\beta_1|$$

但因 $|\alpha_2|=|\beta_1|$，故得

$$|\beta_2|<|\beta_1|$$

若 $\beta_2\neq 0$，再重复上面变换得

$$M_3=M_3TS^{-k}=\begin{bmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \gamma_3 & \delta_3\end{bmatrix}$$

$$|\beta_3|<|\beta_2|$$

如此变换下去，使元素 β 的绝对值逐次下降，即 $|\beta_1|>|\beta_2|>|\beta_3|>\cdots$。因 β_1，β_2，β_3，…全是整数，故经有限次运算后，得到变换

$$MS^{-n}TS^{-m}\cdots TS^{-}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha} & 0\\ \bar{\gamma} & \bar{\delta}\end{bmatrix}$$

因 $\bar{\beta}=0$，故 $\bar{\alpha}\bar{\delta}-\bar{\beta}\bar{\gamma}=\alpha\delta=1$，从而得 $\bar{\alpha}=1$，$\delta=1$ 或 $\bar{\alpha}=-1$，$\bar{\delta}=-1$，而 $\bar{\gamma}$ 仍是一整数，设 $\bar{\gamma}=-i$，i 为整数。因为

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -i & 1 \end{bmatrix} = TS^iT$$

故得

$$MS^{-n}TS^{-m}\cdots TS^{-l} = TS^iT$$

二边右乘 $S^lT\cdots TS^mTS^n$ 得

$$M = TS^iTS^lT\cdots TS^mTS^n$$

即M与T及S的乘幂的若干次相乘等效，因M是模群的任一变换，故说明模群是由二个基本变换T和S产生的。

§8.3 函数$J(\tau)$的基本域

已知函数$\wp(u)$的基本域是2ω和$2\omega'$为边的周期四边形（其每一对边应去除一个，构成单位胞腔）。当对u施以下述二个基本变换时

$$S: \ u' = u + 2\omega$$

$$S': \ u' = u + 2\omega'$$

函数$\wp(u)$不变。即是说，使$\wp(u)$不变的变换群，是由二个基本变换S，S'产生的。对周期四边形施行群的全体变换，即得到无数个不相重叠的周期四边形，它们覆盖着u的全平面，而构成周期四边形网。u平面上任一点，必然在周期四边形内有一点与其相对应，二者的函数值相等。因此，欲知$\wp(u)$在全平面上的情况，知其在一平行四边形内的情况就足够了。

函数$J(\tau)$有类似的情况，如对τ施以（8.14）式的二变换，以及由它们组成的任何线性变换，则$J(\tau)$都保持不变。那末究竟$J(\tau)$是否类似$\wp(u)$存在基本区域呢？其基本区域是什么形状？基本域内点与域外点间关系是什么？这正是本节要研究的。

如前所述，模群的二个基本变换是$\tau' = \tau + 1$，$\tau' = -\frac{1}{\tau}$。由$\tau' = \tau + 1$知，可将τ平面以相距为1的平行线划成无数条带区域，可以认为右方的条带区域是由左方条带区域经变换

而得到的，以此类推至全平面。由 $\tau'=-\frac{1}{\tau}$ 知，实现此变换是以单位圆 $|\tau|=|x+iy|=1$ 为界的。因此我们来观察 τ 的上半平面上满足下列条件的区域 D（图 8.1）

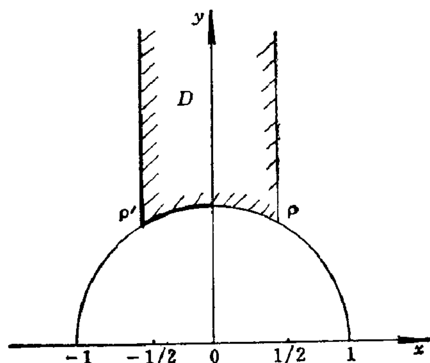


图8.1　$J(\tau)$的基本区域

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{1}{2},\quad x^2+y^2\geqslant 1$$

该区域亦可称作曲线三角形，其一顶点是 oy 的无限远点，另二个顶点是 $x=\pm\frac{1}{2}$ 的线与单位圆的交点 $\rho=e^{i\pi/3}$ 与 $\rho'=e^{i2\pi/3}=\rho-1$。

这个 D 称为模群或函数 $J(\tau)$ 的基本区域。现在来证明 D 具有如下二个基本性质：

（1）D 内的任意二点，不存在互为等价的关系；

（2）τ 平面上半平面的任意点，总能在 D 内找到一点，二者互为等价。

为了证明（1），只需证明在 D 内的任意点 τ 所对应的等价点

$$\tau'=\frac{\alpha\tau+\beta}{\alpha\tau+\delta}$$

必位于 D 之外（$\tau'=\tau$ 除外）。今就 $\gamma=0$，$\gamma=\pm 1$，$|\gamma|>1$ 等四种情况讨论如下

（i）$\gamma=0$。由 $2\delta-\beta\gamma=1$，得 $2\delta=1$，今取 $\alpha=\delta=1$，得

$$\tau'=\tau+\beta$$

因为 β 是整数，且 $\beta\neq 0$，故 τ' 点应位于 D 之外。

（ii）$\gamma=1$。$\beta=2\delta-1$，从而得

$$\tau'=\alpha-\frac{1}{\tau+\delta}$$

$$|\tau'-\alpha|=\frac{1}{|\tau-(-\delta)|}$$

由于 δ 是整数，故 D 内之 τ 至（$-\delta$）点的距离一般大于1。由此知 $|\tau'-\alpha|\leqslant 1$，又因 α 是整数，故一般讲 τ' 在 D 之外。特殊情况是 $\alpha=\delta=0$ 时，$\tau'\tau=-1$，此时 τ 及 τ' 均在 D 的周界单位圆 $x^2+y^2=1$ 上（图8.1）。因此只能将该圆周上 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 0$ 的部分，归属于 D，以避免等价的 τ' 与 τ 同存于 D 内。但此时仍有 $\tau=i$，$\tau=\rho'=(-1+i\sqrt{3})/2$ 点需特别说明。对该二点依次施行变换 T，$S^{-1}T$，TS，得

$$\tau=i;\quad \tau'=T\tau=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\tau=-\frac{1}{\tau}=i=\tau$$

$$\tau=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\quad \tau'=S^{-1}T\tau=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\tau$$

$$=-\frac{1+\tau}{\tau}=\tau$$

$$\tau=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\quad \tau'=TS\tau=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\tau$$

$$=-\frac{1}{1+\tau}=\tau$$

可见在这二点上，$\tau'=\tau$，是等价点。故我们在 $\tau=i$ 处，取二点中的一点归属于 D，而在 $\tau=(-1+i\sqrt{3})/2$ 处取三点中

的一点归于D，这样得到的D仍符合（1）的要求。

(iii) $\gamma=-1$。可以设想此时α，β，γ，δ均改变符号，则得到与（ii）相同的情况。

(iv) $|\gamma|>1$。因γ是整数，故有$|\gamma|\geqslant 2$。由$\tau'=(2\tau+\beta)/(\gamma\tau+\delta)$，得

$$\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{1}{\gamma^2}\,\frac{1}{\tau+\dfrac{\delta}{\gamma}}$$

$$\left|\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}\right|=\frac{1}{\gamma^2}\,\frac{1}{\left|\tau+\dfrac{\delta}{\gamma}\right|}$$

δ，γ均为整数，不论它们取任何值，由图 3.1 知对D中的一点τ有

$$\left|\tau+\frac{\delta}{\gamma}\right|\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$$

代入上式得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}\right|\leqslant\frac{1}{\gamma^2}\leqslant\frac{1}{4}$$

故有

$$\left|\tau'-\frac{\alpha}{\gamma}\right|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

此式表示，τ'点与实轴上点α/γ间的距离$<\sqrt{3}/2$，故τ'点必位于D之外。

综上所述，将图 8.1 中粗界线划归于D，其中$\tau=i$ $\tau=l'$二点按前述规定，则D具有（1）的性质。

为了证明（2），我们先来考察如何借助模变换将基本区域D扩展到D以外的区域，直至扩展覆盖τ平面的上半平面。

若以基本变换S施于D内的各点，则

$$\tau' = S\tau = \tau + 1$$

这表明D内各点均向右平行移动距离1，若将此新区域标为S^1，可见S^1是由整个基本区域D向右移动距离1而形成的。如接连施行此变换，则依次得到新区域S^2，S^3，…。如对D域中的τ施以逆变换S^{-1}，得$\tau' = S^{-1}\tau = \tau - 1$，所得到的新区域为$S^{-1}$，以此连续变换，则得到$S^{-2}$，$S^{-3}$，…。

又若以基本变换T施于D域中的τ，有

$$\tau' = T\tau = -\frac{1}{\tau}$$

所得到的新区域标以T，若再分别对S^1，S^2，…施以变换T，则得到ST，S^2T，以此类推。所得到的区域分布如图8.2所示。反复利用S和T两个基本变换，则得到的新区域将覆盖τ面的上半面。

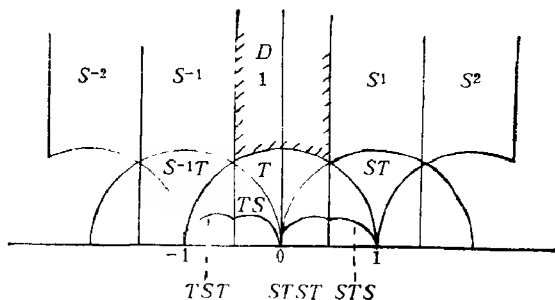


图8.2　基本区域的变换

应当指出，经上述变换所得到的新区域（如S^1，S^{-1}，T，ST，…）间无互相重叠的部分。若邻近的区域A，B间有重叠部分，并设τ'是重叠部分内的一点，则基本区域内有二点τ_1，τ_2满足关系式$\tau' = A\tau_1$，$\tau' = B\tau_2$，从而得到

$$\tau_1 = A^{-1}B\tau_2$$

这表示τ_1和τ_2是互为等价的，由于二点同存于D内，这显然与性质（1）相矛盾（$\tau = i$，l'除外）。

由于τ的上半平面布满与D等价的区域，这就足以说明性质

（2）是成立的，例如区域S^n中的任一点τ'，对其施以变换S^{-n}，得$\tau=S^{-n}\tau'=\tau'-n$，根据上面所述S^n区域的位置，可知τ是D中的一点。对于D域外的任何点均可施以适当的变换，使其落入D中，从而性质（2）得证。

总之，图8.1中的D(包括以粗线表示的周界部分，但$\tau=i$和$\tau=\rho'$点应只取二重和三重点中之一）是$J(\tau)$或模群的基本区域，不仅是D，而且S，T，…中之任何一个区域，从模群的意义上讲，均可当作基本区域。

尚须指明二点：（i）在$\tau=1$，$\tau=\rho'=(-1+i\sqrt{3})/2$点上分别是等价的二重和三重点，仅能取每个重点之一归属于基本区域D。至于$\tau=i$的另一点，则属于区域T，而$\tau=\rho'=(-1+i\sqrt{3})/2$的另二个重点，其一属于区域$TS$，而另一个属于区域$S^{-1}T$。(ii) 图8.1中单位圆的圆弧上由$\tau=\rho$至$i$的一段弧线是由$\tau=\rho'$至$i$的弧线施以变换$T$而得到的，后者属于$D$，而前者($\tau=\rho$至$i$的圆弧)属于$T$。另外$x=\frac{1}{2}$，$y\geqslant\rho$的无限直线，是由$x=\frac{-1}{2}$，$y\geqslant\rho$的直线施以变换$S$得到的，后者属于$D$，而前者应属于$S'$。至于$\tau=\rho=(1+i\sqrt{3})/2$点，同样是三重点，分别属于三个区域。以此原则类推至全平面，可以得到全τ上半平面上各区域分界线和分界点的归属问题。

§8.4　模函数$J(\tau)$

在§8.1中由关于不变量的分析引出模函数$J(\tau)$的基本概念，在§8.2中对自变量τ的模变换进行了讨论，在§8.3中分析了$J(\tau)$的基本区域。现在进一步研究函数$J(\tau)$，包括函数的正则性和收敛性，函数的级数展开式，在基本区域上函数的分布情况，以及τ面上的基本区域在$J(=J(\tau))$面的映像等

（1）函数的收敛性

已知

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}$$

g_2, g_3 见 (8.9) 式，因为

$$\frac{(2\omega)^4}{60}g_2=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(m+n\tau)^4}$$

$$\frac{(2\omega)^6}{140}g_3=\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(m+n\tau)^6}$$

因此为了证明 g_2，g_3 的收敛性，需研究下列级数

$$\sum_{m,n}{}'\frac{1}{(m+n\tau)^k},\quad m,\ n\text{ 是整数，}\ k>2$$

在 τ 的上半平面的收敛情况。设 $\tau=x+iy$，ε，c 为任意二正数，则有

$$|m+n\tau|^2-\varepsilon^2|m+in|^2=(m+nx)^2+n^2y^2-\varepsilon^2(m^2+n^2)$$

$$=m^2\left(1-\frac{1}{c^2}-\varepsilon^2\right)+\left(\frac{m}{c}+cnx\right)^2$$

$$+n^2\{y^2-(c^2-1)x^2-\varepsilon^2\}$$

当选择 ε 为充分小的正数，$c>1$ 但接近于 1 时，上式的第一项为正数，而第三项也大于 0（因为在 τ 的上半平面的任何闭区域中，总可选二常数 η_1，η_2，使 $|x|\leqslant\eta_1$，$|y|\geqslant\eta_2$），当然第二项亦大于 0。故选择充分小的正数 ε，必有下不等式成立

$$|m+n\tau|>\varepsilon|m+in|$$

从而得

$$\sum_{m,n}{}'\frac{1}{|m+n\tau|^k}<\frac{1}{\varepsilon^k}\sum_{m,n}{}'\frac{1}{|(m+in)^k|},\quad k>2$$

已知上不等式右方的无穷级数是收敛级数（$k>2$），故左方级数是一致收敛级数，并在 τ 的上半平面的任何闭区域内，此级数是对 τ 的一正则函数。

对于函数 $J(\tau)$，由于其表示式的分母 $g_2^3-27g_3^2$ 是函数 $y=\mathscr{P}(u)$ 的方程式 $4y^3-g_2y-g_3=0$ 的判别式，该方程的三个根

$e_1 \neq e_2 \neq e_3$，故判别式不等于 0，因此 $J(\tau)$ 在 τ 的上半平面内的每个点是 τ 的正则函数。

（2）级数展开式

今将 $J(\tau)$ 看作 $q^2=e^{2\pi\tau i}$ 的函数，并将 $J(\tau)$ 展成 q 的级数。因为 $J(\tau+1)=\tau(\tau)$，故 $J(\tau)$ 是 $q^2(|q|<1)$ 的单值函数。

从正弦的无限乘积式出发

$$\sin \pi u=\pi u\prod_m{}'\left(1+\frac{u}{m}\right)e^{-\frac{u}{m}}$$

取上式对数的导数，得

$$\pi\frac{\cos\pi u}{\sin\pi u}=\frac{1}{u}+\sum_m{}'\left\{\frac{1}{u+m}-\frac{1}{m}\right\} \tag{8.15}$$

因为

$$\cos \pi u=\frac{1}{2}e^{-\pi ui}(e^{2\pi ui}+1)$$

$$\sin \pi u=\frac{1}{2i}e^{-\pi ui}(e^{2\pi ui}-1)$$

令 $Z=e^{2\pi ui}$，则当 $|Z|<1$ 时，得

$$\pi\mathrm{ctg}\pi u=\pi i\frac{Z+1}{Z-1}=\pi i+\frac{2\pi i}{Z-1}$$

$$=-\pi i(1+2Z+2Z^2+\cdots)$$

由（8.15）式得

$$\frac{1}{u}+\sum_m{}'\left\{\frac{1}{u+m}-\frac{1}{m}\right\}=-\pi i(1+2Z+2Z^2+\cdots) \tag{8.16}$$

将（8.16）式对 u 求导三次，得

$$-6\sum_m\frac{1}{(u+m)^4}=-16\pi^4(Z+8Z^2+\cdots)$$

再求导二次，得

$$-120\sum_{m}\frac{1}{(u+m)^{6}}=64\pi^{6}(Z+32Z^{2}+\cdots)$$

令 $u=n\tau(n>0)$， $Z=e^{2\pi n\tau i}=q^{2n}$，从而得

$$6\sum_{m}\frac{1}{(m+n\tau)^{4}}=16\pi^{4}(q^{2n}+8q^{4n}+\cdots)$$

$$120\sum_{m}\frac{1}{(m+n\tau)^{6}}=-64\pi^{6}(q^{2n}+32q^{4n}+\cdots)$$

将上二式代入 (8.9) 式得

$$g_2=\frac{60}{(2\omega)^4}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^4}\right\}$$

$$=\frac{60}{(2\omega)^4}\left\{\frac{\pi^4}{45}+\frac{16\pi^4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(q^{2n}+8q^{4n}+\cdots)\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^4\left(\frac{4}{3}+320q^2+2560q^4+\cdots\right)$$

$$g_3=\frac{140}{(2\omega)^6}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{m^6}+2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+n\tau)^6}\right\}$$

$$=\frac{140}{(2\omega)^6}\left\{\frac{2\pi^6}{945}-\frac{16\pi^6}{15}\sum_{n=1}^{\infty}(q^{2n}+32q^{4n}+\cdots)\right\}$$

$$=\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)^6\left(\frac{8}{27}-\frac{448}{3}q^2-\frac{14336}{3}q^4-\cdots\right)$$

代入 $J(\tau)$ 的表示式得

$$J(\tau)=\frac{1}{1728}\left(\frac{1}{q^2}+744+196884q^2+21493760q^4+\cdots\right) \tag{8.17}$$

这就是所要求的级数式。当 $0<|q|<1$ 时，该级数收敛。

（3）在基本区域上 $J(\tau)$ 的分布

函数 $J(\tau)$ 的值在基本区域上的分布具有下述特点：

（i）令 $\tau=x+iy$，当 $y\to\infty$ 时，函数 $J(\tau)$ 均一地趋于

无限大。

因为 $q=e^{\pi\tau i}=e^{\pi x i}e^{-\pi y}$，$q^{-2}=e^{-2\pi x i}e^{2\pi y}$，由 (8.17) 式立即可以得出这个结论。

(ii) 在基本区域D的顶点 $\tau=i$ 和 $\tau=(-1+i\sqrt{3})/2=\rho'$ 处，函数值分别为

$$J(i)=1,\qquad J\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0 \tag{8.18}$$

因为$\rho'=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，故有$\rho'^3=1$。将 $\tau=\rho'$ 代入 g_2的公式得

$$\frac{(2\omega)^4}{60}g_2=\sum_{m,\ n}{}'\frac{1}{(m+n\rho')^4}=\frac{1}{\rho'}\sum_{m,\ n}{}'\frac{1}{(m\rho'^2+n)^4}$$

再利用关系式 $\rho'^2+\rho'+1=0$，得

$$\sum_{m,\ n}{}'\frac{1}{(m\rho'^2+n)^4}=\sum_{m,\ n}{}'\frac{1}{(n-m-m\rho')^4}$$

$$=\sum_{n_1,m_1}\frac{1}{(n_1+m_1\rho')^4}$$

故得

$$\frac{(2\omega)^4}{60}g_2=\frac{1}{\rho'}\sum_{n_1,\ m_1}{}'\frac{1}{(n_1+m_1\rho')^4}=\frac{1}{\rho'}\frac{(2\omega)^4}{60}g_2$$

或

$$\left(1-\frac{1}{\rho'}\right)g_2=0$$

$$g_2=0$$

最后得

$$J(\rho')=0$$

同理可以求得在 $\tau=-\dfrac{1}{\rho'}=-\rho'^2=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 点，

$J(\tau)=0$；当 $\tau=i$ 时，$J(\tau)=1$。

(iii) 基本区域D中，在对虚轴为对称的二点 τ 和 τ'，其函数 $J(\tau)$ 和 $J(\tau')$ 为共轭复数。

设 $\tau=x+iy$，$\tau'=-x+iy$，与 τ 对应的不变量用 g_2，g_3 表示，而与 τ' 对应的为 g_2'，g_3'。由 (8.9) 式得

$$16\omega^6 g_3=35\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{(m+nx+iny)^{-6}$$

$$+(-m+nx+iny)^{-6}\}+2(x+iy)^{-6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{-6}$$

$$=35\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{(m+nx+iny)^{-6}$$

$$+(m-nx-iny)^{-6}\}+2(x+iy)^{-6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{-6}$$

同理得

$$16\omega^6 g_3'=35\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\{(m-nx+iny)^{-6}$$

$$+(m+nx-iny)^{-6}\}+2(x-iy)^{-6}\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^{-6}$$

故 g_3 与 g_3' 为共轭复数；同理 g_2 与 g_2' 亦为共轭复数。因此 $J(\tau)$ 与 $J(\tau')$ 为共轭复数。

(iv)在基本区域D中，函数只在虚轴上和D的边界上为实数。

已知二个共轭复数相等的条件是二者是相等的实数。由于D的边界上点对 y 轴呈对称分布，其一为 $\tau=x+iy$，另一为 $\tau'=-x+iy$。因此由 (iii) 知对称的边界上点所对应的函数 $J(\tau)$ 与 $J(\tau')$构成共轭复数对。另一方面，已知边界上点 τ 和 τ'(其中有一个不属于D) 互为等价，有 $J(\tau)=J(\tau')$。故 $J(\tau)$和 $J(\tau')$ 为实数。同理知D内虚轴上点的函数值为实数。

(v) 对于任意数 a，下列方程在基本区域D内有一个且仅

有一个根

$$J(\tau)-a=0 \tag{8.19}$$

为了证明这个性质，我们利用性质（i），即$y\to\infty$时，$|J(\tau)|\to\infty$。故对于任意的a值，总可找出适当的H，使$y\geqslant H$时有$|J(\tau)|>|a|$，即（8.19）式在$y\geqslant H$时没有根。如图 8.3 所示，令$y=H$的直线与D域边界线相交于A，A'点。因此问题化为在$ALIL'A'$区域D_H中，求（8.19）式有几个根。

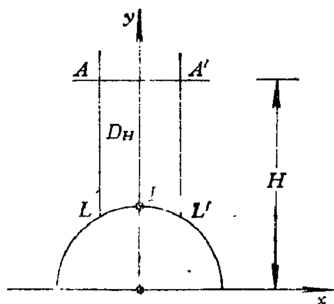


图8.3　D的部分区域

设（8.19）式在D_H边界线$ALIL'A'$上没有根，而在D_H中有n个根，根据拉格朗日（Lagrange）关于正则函数零点和极点的定理得

$$N=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{J'(\tau)}{J(\tau)-a}d\tau=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{AL}+\int_{LI}+\int_{IL'}\right.$$
$$\left.+\int_{L'A'}+\int_{A'A}\right\}d\ \ln[J(\tau)-a]$$
$$=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5 \tag{8.20}$$

因为$J(\tau+1)=J(\tau)$，$J\left(-\frac{1}{\tau}\right)=J(\tau)$，故有

$$J_1+J_4=0,\ J_2+J_3=0 \tag{8.21}$$

因此

$$N=\frac{1}{2\pi i}\int_{A'A}d\ln[J(\tau)-a]$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\{\ln[J(\tau)-a]\}_{A'}^{A} \tag{8.22}$$

当y足够大时，由（8.17）式可以得到下列近似式

$$J(\tau)-a\to\frac{1}{1728}e^{2\pi y}e^{-2\pi xi}(1+\varepsilon)$$

当$y\to\infty$时，$\varepsilon\to 0$。从而可以得到

$$\{\ln[J(\tau)-a]\}_{A'}^{A}=2\pi i+\{\ln(1+\varepsilon)\}_{A'}^{A}\to 2\pi i$$

代入（8.20）式得$N=1$，即在D_H内，仅有一个τ点，使$J(\tau)=a$。

现在设在D_H的边界线上有满足（8.19）式的根，其根的个数必然是有限的，又规定$a\neq 0$，1，则显然此根不是$\tau=i$，$\tau=\pm\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$。在边界上以这些根点为中心作圆弧作为积分路线，如图 8-4 所示。其中B'，C'分别是由B，C施以基本变换得到的，即$B'=SB$，$C'=TC$。对于图 8.4 的积分路线，显然（8.21）式成立，用类似分析法亦得到$N=1$的结论。

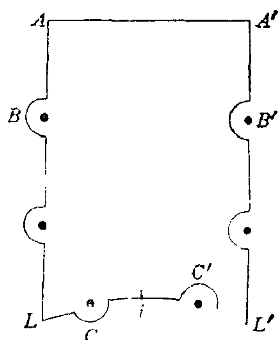


图8.4　D_H的边界(一)

（vi）关于$a=1$，$a=0$时，方程（8.19）根的阶数。

从（ii）的分析中知需考察下列二个方程

$$a=1:\quad J(\tau)-1=0 \qquad (8.23\text{A})$$

$$a=0:\quad J(\tau)=0 \qquad (8.23\text{B})$$

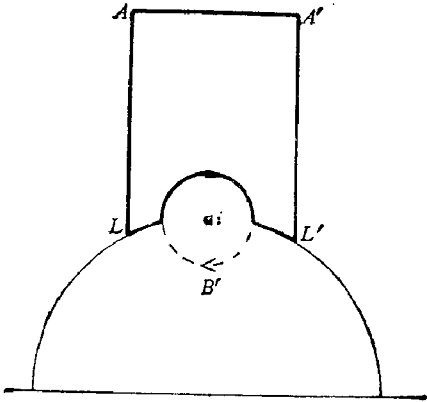
当$a=1$时，围绕$\tau=i$作小圆周，积分路线如图 8.5(a) 所示，此时（8.20）式化为

$$N=\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_B+\int_{A'A}\right\}d\ln[J(\tau)-1]$$

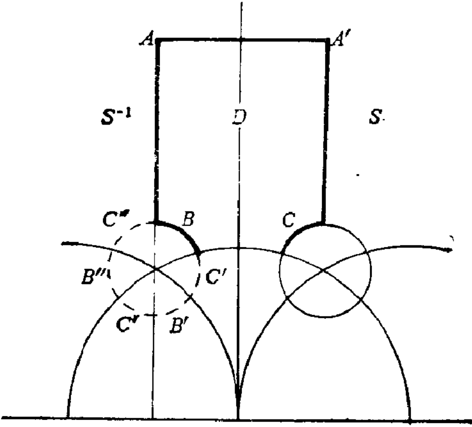
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_B d\ln[J(\tau)-1]+1$$

积分变成考察沿B的积分。因为以i为圆心的半径很小，故有$TB=B'$，则绕i一周的积分（负方向）为

$$\int_{B+B'}=2\int_B$$



(a)



(b)

图8.5 D_H的边界(二)

在$B+B'$所包围的小圆域内，只有 i 点满足$J(\tau)-1=0$。又知

$$J(\tau)-1=\frac{27g_3^2}{g_2^3-27g_3^2}$$

可见当$J(\tau)-1=0$时，得$g_3^2=0$，故可以判断 i 的阶数是 α 的倍数，以 $2n$ 表示，则得

$$\int_{B+B'} = -i2\pi \cdot 2n$$

$$\int_{B} = -i2\pi n$$

由此得

$$N = \frac{-i2\pi n}{i2\pi} + 1 = 1 - n, \quad n = 1 - N$$

数 $2n$ 是方程（8.23A）的根 $\tau = i$ 的阶数，因 n 是正整数，故 $n \geqslant 1$，另一方面 $N \geqslant 0$，由此知 $n \leqslant 1$，故得

$$n = 1, \quad N = 0$$

可知在 D 内，仅有 $\tau = i$ 是 $J(\tau) - 1$ 的根，其阶数为 2。前面已指出，这个 i 的邻域只有一半属于 D，即只有一个单根 $\tau = i$ 属于 D，而另一个根则属于区域 T（图 8.2）。

现在研究方程（8.23B）。已知 $\tau = (-1 + i\sqrt{3})/2$ 处 $J(\tau) = 0$，用类似的方法取图 8.5(b) 中粗线作为求 N 的积分路线，则积分简化为

$$\int_{B} + \int_{C} + \int_{A'A} = \int_{B} + \int_{C} + i2\pi$$

为了计算沿小圆周弧线 B 和 C 的积分（参看图 8.5），因小圆的直径足够小，故可设各圆弧间存在如下变换式

$$B' = TSB, \quad B'' = S^{-1}TB,$$

$$C' = TC, \quad C'' = S^{-1}TS^{-1}C,$$

$$C''' = S^{-1}C。$$

小圆周总长

$$E = B + C' + B' + C'' + B'' + C'''$$

因圆周半径很小，有

$$\int_{E} = 3\left\{\int_{B} + \int_{C}\right\}$$

由于 E 的内部只有 $\rho' = (-1 + i\sqrt{3})/2$ 点是 $J(\tau)$ 的零点，并有 $J(\rho') = 0$，$g_2^3 = 0$。由此知 ρ' 的阶数是 3 的倍数，令以

$3n$ 表示。今按负方向沿圆周E积分，则得

$$\int_E = -i2\pi\cdot 3n$$

进一步得

$$\int_B + \int_C = -i2\pi n,\ n\geqslant 1$$

由此得

$$N=1-n,\ N\geqslant 0$$

故

$$N=0,\ n=1$$

这表明，在D内仅有$\tau=\rho'$是$J(\tau)$的零点，其阶数等于3。这三个点中属D的只有一个。$\tau=\rho'$是六个区域的汇聚点，其他五个区域（TS，$S^{-1}T$，T，TST，S^{-1}）均是D的等价区域。这六个区域各含有$\tau=\rho'$的全部邻域的六分之一。由基本区域的定义知，$\tau=\rho'$只能属于这六个区域中的三个，即D和另二个区域，而不属于其余的三个区域。对于与ρ'对称的点$\tau=(1+i\sqrt{3})/2$，亦有相似的情形，它不属于D，而属于S。因此，在$\tau=\rho'$的三重根，分属于三个区域，故方程（8.23B）在D中仅有一个单根。

（4）τ-J面的映像

今取τ面上D的一半区域进行研究。如上面指出的，$J(\tau)$在y轴上以及D的半周界上取实数（当然按对称分布原理，另一半周界上$J(\tau)$也是实数，但这半个周界按定义已不属于D）。可见如图8.6所示，在τ面上粗实线周界对应$J(\tau)$面的实轴。

根据以上分析，当$\tau=y\to\infty$时，$J(\tau)=\infty$（用C点表示）；$\tau=i$时，$J(\tau)=1$（B点）；$\tau=(-1+i\sqrt{3})/2$时，$J(\tau)=0$（A点）。因此当τ由$y=\infty$处沿y轴下降时，$J(\tau)$则相应地由$+\infty$点沿实轴逐渐减少，当τ下降到i点时，$J(\tau)$减少到$+1$；当τ继续沿单位圆由$\tau=i$到ρ'点时，$J(\tau)$由$+1$下降到0，当τ由$\tau=\rho'$点出发沿$x=-1/2$线向上移动时，

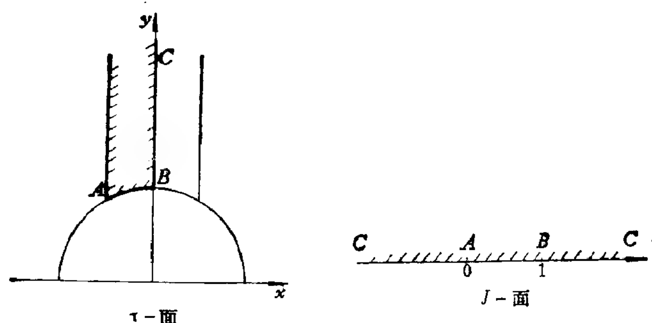


图8.6　τ－J 面的映像

$J(\tau)$ 值继续减小（<0），否则它在此边上取值等于它在先前边上的值，由§8.3的性质(1)知，这是不可能的。因此当 τ 沿 $x=-1/2$ 边上升至∞时，$J(\tau)$ 则沿实轴下降至$-\infty$，在 τ-$J(\tau)$ 面上这种对应关系是一对一的。因此 τ 面上 CAB 区域映射为 $J(\tau)$ 面的上半平面。根据对称性原理，以 y 轴为对称轴的 D 的另一半区域对应着 $J(\tau)$ 的下半平面。对 $\tau=x+iy$ 和 $\tau'=-x+iy$ 二点对应的 $J(\tau)$ 与 $J(\tau')$，二者互为共轭复数，在 $J(\tau)$ 面上对实轴呈对称分布。

对 τ 面上其他等价区域，在 $J(\tau)$ 面上有对应的区域。因此 τ 的上半平面对应着以∞，0，1为支点的无数以 $J(\tau)$ 平面所连结成的黎曼（Riemann）面。

§8.5　模函数λ(τ)

前面研究的模函数 $J(\tau)$ 是一个最简单的模函数。现在研究模函数 $\lambda(\tau)$。它等于雅各比椭圆函数模的平方，由（3.100）式得

$$k^2=\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}=\lambda(\tau) \tag{8.24}$$

λ 仅是 τ 的函数，当 $I_m(\tau)>0$ 时，它是 τ 的正则函数。函数 $\lambda(\tau)$ 的一个重要性质是它对于模变换群并非不变。例如二个基本变换

$$S=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\qquad \tau'=S\tau=\tau+1$$

$$T=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\qquad \tau'=T\tau=-\frac{1}{\tau}$$

应用（7.13）式得

$$\lambda(\tau+1)=-\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_4^2(0\mid\tau)}$$

再由（3.82）式得$\vartheta_4^4=\vartheta_3^4-\vartheta_2^4$，代入上式得

$$\lambda(\tau+1)=\frac{1}{1-\dfrac{1}{\lambda(\tau)}}=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}\tag{8.25}$$

根据（7.36）和（7.37）式得

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{\vartheta_4^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}=\frac{\vartheta_3^4(0\mid\tau)-\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}$$

因此有

$$\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=1-\lambda(\tau)\tag{8.26}$$

还可以证明，对于其他变换$\lambda(\tau)$也是变化的。虽然如此，我们仍然可以从整个模群Γ中取某一个子群（Γ_2），使函数$\lambda(\tau)$对于该子群是不变的，并由此得出$\lambda(\tau)$的基本区域。

模群Γ中的每一个变换都是由S，T的结合而形成的，由§8.2分析已知，任一变换M都具有下列形式

$$M=TS^iTS^l\cdots TS^mTS^n\tag{8.27}$$

为了得到模函数的基本区域，须搞清如何选取M使函数$\lambda(M\tau)$不变或具有不同的值。换句话说，应了解如何选取(8.27)式中的指数i，l，$\cdots m$，n的值，使函数$\lambda(M\tau)$不变，或改变，首先我们注意到，由（8.25）式得

$$\lambda(S^2\tau)=\lambda[S(S\tau)]=\frac{\lambda(S\tau)}{\lambda(S\tau)-1}$$

$$=\frac{\lambda(\tau)}{[\lambda(\tau)-1]\left[\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}-1\right]}=\lambda(\tau)$$

另外，因 $T^2=I$，得

$$\lambda(T^2\tau)=\lambda(I\tau)=\lambda(\tau)$$

因此为了得到 $\lambda(M\tau)$ 的不同值，应研究 (8.27) 式中使 i，l，…，m，n 的每一个取 0 或 1 的变换。即应研究下列各种变换

$$TSTS\cdots T,\ TSTS\cdots TS,\ STST\cdots T,\ STST\cdots S$$

注意到

$$STSTST=TSTSTS=I$$

故

$$\lambda(STSTST\tau)=\lambda(TSTSTS\tau)=\lambda(\tau)$$

又

$$\lambda(TSTS\tau)=\lambda(TSTSTSST\tau)=\lambda(ST\tau)$$

故剩下如下五种变换

$$S,\ T,\ ST,\ TS,\ TST$$

连同 I 共六种，可以看到

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda(I\tau)=\lambda(\tau)\\
&\lambda(S\tau)=\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}\\
&\lambda(T\tau)=1-\lambda(\tau)\\
&\lambda(ST\tau)=\frac{\lambda(T\tau)}{\lambda(T\tau)-1}=\frac{1-\lambda(\tau)}{1-\lambda(\tau)-1}\\
&\qquad=\frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)}=\lambda(S^{-1}T\tau)\\
&\lambda(TS\tau)=1-\lambda(S\tau)=1-\frac{\lambda(\tau)}{\lambda(\tau)-1}=\frac{1}{1-\lambda(\tau)}\\
&\lambda(TST\tau)=1-\lambda(ST\tau)=1\\
&\qquad-\frac{\lambda(\tau)-1}{\lambda(\tau)}=\frac{1}{\lambda(\tau)}=\lambda(STS\tau)
\end{aligned}\right\}\tag{8.28}$$

可见当M取I，S，T，TS，$S^{-1}T$，STS时，得到的$\lambda(M\tau)$是不同的。因此函数$\lambda(\tau)$的基本区域E应包括用I，S，T，TS，$S^{-1}T$，STS为表征的不同的六个区域，它们是与整个模群基本区域D等价的六个区域。图8.7表示出这六个区域。这些区域的形成过程是：先取D的左半区域（以y轴为界）作为

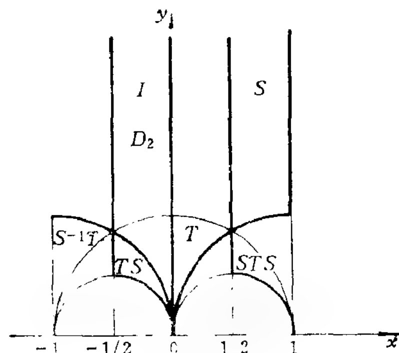


图8.7　$\lambda(\tau)$的基本区域E，$\tau=x+iy$

D_2，该区域是由直线$x=0$，$x=-\dfrac{1}{2}$和圆周$|\tau|=1$为边界。然后对D_2的每一点作变换S得到区域S，同理可以得到图示的区域T，$S^{-1}T$，TS，STS。结果得到的基本区域E是由直线

$$x=-1,\quad x=1$$

和圆周

$$\left|\tau+\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\qquad \left|\tau-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

所围成的。

现在来研究函数λ与J的关系。由(2.20)式

$$k^2=\frac{e_3-e_2}{e_1-e_2},\quad 1-k^2=\frac{e_1-e_3}{e_1-e_2}$$

$$e_1=\mathscr{P}(\omega),\quad e_2=\mathscr{P}(\omega'),\quad e_3=\mathscr{P}(\omega+\omega')$$

可以得到

$$1-k^2+k^4=1-k^2(1-k^2)=1-\frac{(e_3-e_2)(e_1-e_3)}{(e_1-e_2)^2}$$

$$=\frac{e_1{}^2+e_2{}^2+e_3{}^2-(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)}{(e_1-e_2)^2}$$

$$=\frac{(e_1+e_2+e_3)^2-3(e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2)}{(e_1-e_2)^2}$$

$$=\frac{3g_2}{4(e_1-e_2)^2}$$

故

$$J(\tau)=\frac{g_2^3}{g_2^3-27g_3^2}=\frac{g_2^3}{16(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2(e_1-e_2)^2}$$

$$=\frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{\left(\dfrac{e_3-e_2}{e_1-e_2}\right)^2\left(\dfrac{e_1-e_3}{e_1-e_2}\right)^2}$$

$$=\frac{4}{27}\frac{(1-k^2+k^4)^3}{k^4(1-k^2)^2}$$

最后得

$$J(\tau)=\frac{4}{27}\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2} \tag{8.29}$$

在$\lambda(\tau)$的基本区域E中，当$\lambda(\tau)$取任意数a时，只能取一次，并有满足$\lambda(\tau)=a$的τ存在，此τ值满足下式

$$J(\tau)=\frac{4}{27}\frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}=A \tag{8.29A}$$

由函数$J(\tau)$的性质知，在D_2，S，T，TS，$S^{-1}T$，STS各区域内，满足$J(\tau)=A$之τ点仅有一点，这表示在E中满足$J(\tau)=A$之τ点，共有六点。但这六点中，只有一点表示$\lambda(\tau)=a$，其他各τ点的$\lambda(\tau)\neq a$，各点的$\lambda(\tau)$分别如下：

$$\lambda(\tau)=a,\quad 1-a,\quad \frac{1}{a},\quad \frac{1}{1-a},\quad \frac{a}{a-1},\quad \frac{a-1}{a} \tag{8.30}$$

特殊情况是，当

$$a=0,\ 1,\ \infty,\quad A=\infty$$

$$a = -1,\ 2,\ \frac{1}{2},\quad A = 1$$

$$a = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad A = 0$$

可见出现了函数等值情况，此时须用与上一节的$J(\tau)$相同的方法处理。

上述分析表明τ平面上的基本区域E，与λ的全平面构成一对一的对应关系，下面来进一步讨论这种对应关系。

首先考察τ沿虚轴y（$\tau = x + iy$）变动情形。将（3.92），（3.93）式代入（8.24）式，得

$$\lambda(\tau) = \left\{\frac{\vartheta_2(0|\tau)}{\vartheta_3(0|\tau)}\right\}^4 = 16q\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^8 \tag{8.31}$$

当$\tau = iy$时，$q = e^{\pi\tau i} = e^{-\pi y} > 0$，$\lambda(\tau) > 0$。故有$y\to\infty$时，$q\to 0$，$\lambda(\tau)\to 0$。当$\tau = i$时，格阵$\Omega$呈正方形，由§2.1·3知，$e_2 = -e_1$，$e_3 = 0$，得

$$\lambda(i) = \frac{-e_2}{-e_2 - e_2} = \frac{1}{2}$$

因此当τ自i点沿虚轴上升至无限远点时，相应地在λ面上λ沿实轴自$\frac{1}{2}\to 0$。关于τ面虚轴上$\tau = i \to 0$的部分，它等于将变换T施于虚轴上$\tau = i \to i\infty$的部分。在这种变换下函数λ应改变为$1-\lambda$。因此$\tau = 0 \to i$的部分，对应λ面实轴上，$\lambda = 1 \to \frac{1}{2}$。

其次，若对τ面虚轴施以变换S^{-1}时，得$\tau' = -1 + iy$，此时

$$q = e^{(-1+iy)\pi i} = -e^{-\pi y},\quad \lambda(\tau') > 0$$

可见τ面上直线$x = -1$，对应λ平面实轴上$\lambda = 0$——∞的部分。对于直线$x = 1$，亦有相似的结论。

最后，若对 $\tau = x = 1$ 施以变换 T，则 $\tau' = -\dfrac{1}{\tau}$，即

$$x' + iy' = -\frac{1}{1 + iy}$$

二边同加 $\frac{1}{2}$，得

$$\left(x' + \frac{1}{2}\right)^2 + y'^2 = \frac{1}{4}$$

这表明变换后 τ' 是圆心位于 $x' = -\frac{1}{2}$，半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆周。相应于该变换的函数 λ 应改变为 $1-\lambda$，而 λ 原位于 $0——\infty$ 部分。由此可见 τ 面上以 $(-1,\ 0)$ 为直径的上半个圆周对应 λ 面实轴上 $\infty - 1$ 的部分。二个平面上对应点用 A，B，C，D 表示，全部映像见图 8.8。

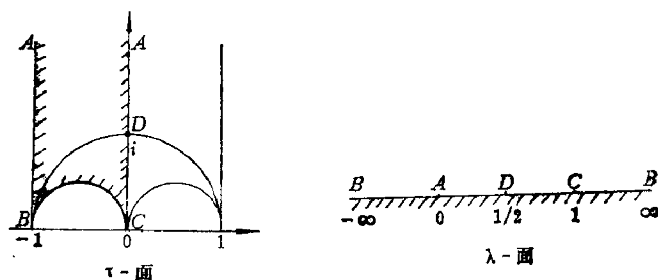


图8.8　τ-λ 面的映像

第九章　椭圆函数的三角级数式

本章研究将椭圆函数展开为一重三角级数式，包括将有实数周期的函数在正则带域内展开为傅里叶级数。这些级数式是以q的函数作为系数，在$|q|<1$时具有较快收敛性。

§9.1　函数$\wp,\zeta,\sigma$,的级数式

本节将卫尔斯特拉斯型函数展成一维无限级数式，其系数包含参量$q(=e^{\pi\tau i})$．这对实际计算显然是很有意义的。

首先研究函数$\sigma(u)$。令$q=e^{\pi\tau i}$，$z=e^{\pi v i}$，$u=2\omega_1 v$。将(3.87)～(3.94)式代入(3.95)式得

$$\sigma(u)=2\omega_1 e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_1(v)}{\vartheta_1'(0)}$$

$$=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{z-z^{-1}}{zi}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n}z^2)(1-q^{2n}z^{-2})}{(1-q^{2n})^2}$$

$$=\frac{2\omega_1}{\pi}e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\sin\pi v\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos2\pi v+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}\tag{9.1}$$

$$\sigma_1(u)=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_2(v)}{\vartheta_2(0)}$$

$$=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{z+z^{-1}}{2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n}z^2)(1+q^{2n}z^{-2})}{(1+q^{2n})^2}$$

$$=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\cos\pi v\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos2\pi v+q^{4n}}{(1+q^{2n})^2}\tag{9.2}$$

$$\sigma_2(u)=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_3(v)}{\vartheta_3(0)}$$

$$=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+q^{2n-1}z^2)(1+q^{2n-1}z^{-2})}{(1+q^{2n-1})^2}$$

$$=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}{(1+q^{2n-1})^2} \tag{9.3}$$

$$\sigma_3(u)=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\frac{\vartheta_4(v)}{\vartheta_4(0)}$$

$$=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1}z^2)(1-q^{2n-1}z^{-2})}{(1-q^{2n-1})^2}$$

$$=e^{2\eta_1\omega_1 v^2}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}}{(1-q^{2n-1})^2} \tag{9.4}$$

其次研究函数$\zeta(u)$。根据(3.12)式

$$\zeta(u)=\frac{d}{du}\ln\sigma(u)=\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} \tag{9.5}$$

将(9.1)式关于u取对数并求导，代入上式得

$$\zeta(u)=2\eta_1 v+\frac{\pi}{2\omega_1}\left\{\operatorname{ctg}\pi v+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4q^{2n}\sin 2\pi v}{1-2q^{2n}\cos 2\pi v+q^{4n}}\right\} \tag{9.6A}$$

这是一重无限级数式，而不是象(3.3)式那样的二重级数式。除此而外，还可以表示成另一种级数形式，即

$$\zeta(u)=2\eta_1 v+\frac{i\pi}{2\omega_1}\frac{z+z^{-1}}{z-z^{-1}}$$

$$-\frac{i\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{q^{2n}z^2}{1-q^{2n}z^2}-\frac{q^{2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}}\right\} \tag{9.6B}$$

还可以将上式化为另一种形式。对于上式右方的二无限级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}z^2}{1-q^{2n}z^2}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}}$$

因$|q|<1$，故易证明在其分母不等于0的z之任意变域内，级数具有最大的收敛性。今选取z，使满足

$$|q^2|<|z^2|<|q^{-2}|$$

在此环状域内，必成立下列二不等式

$$|q^{2n}z^2|<1\quad,\quad|q^{2n}z^{-2}|<1$$

故可将上述二级数展为 z 的幂级数后，括出 z 的同幂项，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{q^{2n}z^{2}}{1-q^{2n}z}-\frac{q^{2n}z^{-2}}{1-q^{2n}z^{-2}}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{2m}}{1-q^{2m}}(z^{2m}-z^{-2m})$$

将上式代入(9.6B)式得

$$\zeta(u)=2\eta_1 v+\frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\pi v-\frac{i\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}(z^{2n}-z^{-2n})$$

$$=2\eta_1 v+\frac{\pi}{2\omega_1}\operatorname{ctg}\pi v+\frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi v \quad (9.7)$$

(9.7)式对 u 求导，得

$$\wp(u)=-\zeta'(u)$$

$$=\frac{1}{(2\omega_1)^2}\left\{-4\eta_1\omega_1+\pi^2\csc^2\pi v-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2n\pi v\right\} \quad (9.8\text{A})$$

或

$$\wp(u)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}-\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left\{\frac{1}{(z-z^{-1})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{q^{2n}z^{-2}}{(1-q^{2n}z^{-2})^2}+\frac{q^{2n}z^{2}}{(1-q^{2n}z^{2})^2}\right]\right\} \quad (9.8\text{B})$$

再对 u 求导一次得

$$\wp'(u)=\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^3\left\{-2\cos\pi v\csc^3\pi v+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2q^{2n}}{1-q^{2n}}\sin 2n\pi v\right\} \quad (9.9)$$

此外，还可以将与 $\wp(u)$ 及其微分方程有关的若干常数展开成级数式。

在(9.8B)中，令 $u=\omega_1$，$z=i$，则得 e_1 的表示式

$$e_1=\mathscr{P}(\omega_1)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\left\{1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right\}\tag{9.10}$$

同样，令 $u=\omega_2$，$z=q^{1/2}$，得

$$e_2=\mathscr{P}(\omega_2)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}-2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\tag{9.11}$$

再令 $u=-\omega_1-\omega_2$，$z=-iq^{-1/2}$，得

$$e_3=\mathscr{P}(\omega_3)=-\frac{\eta_1}{\omega_1}+2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}\tag{9.12}$$

将(9.6A)的右方展开成 v 的幂级数，得

$$\begin{aligned}\zeta(u)=&2\eta_1 v+\frac{\pi}{2\omega_1}\left\{\frac{1}{\pi v}-\frac{1}{3}\pi v-\frac{1}{45}(\pi v)^3\right.\\&\left.-\frac{2}{945}(\pi v)^5\cdots\right\}\\&+\frac{2\pi}{\omega_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\left\{2n\pi v-\frac{4}{3}(n\pi v)^3\right.\\&\left.+\frac{4}{15}(n\pi v)^5\cdots\right\}\end{aligned}\tag{9.13A}$$

再以 $u=2\omega_1 v$ 代入(3.4B)式中，得

$$\zeta(u)=\frac{1}{2\omega_1 v}-\frac{2g_2\omega_1^3}{15}v^3-\frac{8g_3\omega_1^5}{35}v^5-\cdots\tag{9.13B}$$

比较上二式中 v，v^3，v^5 之系数则得

$$\eta_1=\frac{\pi^2}{\omega_1}\left\{\frac{1}{12}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}\tag{9.14}$$

$$\begin{aligned}g_2=&\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4\left\{\frac{1}{12}+20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}\\=&\frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^4\left\{1+240(q^2+9q^4+28q^6+73q^8+126q^{10}+\cdots)\right\}\end{aligned}\tag{9.15}$$

$$g_3=\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6\left\{\frac{1}{216}-\frac{7}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5q^{2n}}{1-q^{2n}}\right\}$$

$$=\frac{1}{216}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^6\left\{1-504(q^2+33q^4+244q^6+1057q^8+3126q^{10}+\cdots)\right\} \tag{9.16}$$

§9.2 雅各比函数的傅里叶级数式

本节我们要研究具有实数周期，且在平行于实轴的闭带域内收敛的椭圆函数展开为傅里叶级数的问题。首先讨论这种函数的傅里叶级数的系数与函数带域参量间的关系，然后再对雅各比函数进行展开。

（1）周期性解析函数的带域与其傅里叶级数系数间的关系

（i）设 $f(z)(z=x+iy)$ 是周期为 2π 的解析函数，且在闭带域 $-a\leqslant y\leqslant b\ (a>0,\ b>0)$ 内为正则的。又设函数的傅里叶级数为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{nzi} \tag{9.17}$$

则有

$$\left.\begin{aligned}|c_{-n}|\leqslant Me^{-nb}\\ |c_n|\leqslant Me^{-na}\end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

$$n=0,1,2\cdots$$

式中 M 是与 n 无关的常数。为了证明(9.18)式成立，取以 $Z=0$, 2π, $2\pi+ib$, ib 为顶点的矩形。函数 $f(z)e^{nzi}$ 在该矩形内及边界上为正则的，故该函数沿矩形边界的积分为0，即

$$\int_0^{2\pi}f(x)e^{nxi}dx+i\int_0^b f(2\pi+iy)e^{-ny}dy$$

$$+\int_{2\pi}^0 f(x+ib)e^{nxi-nb}dx+i\int_b^0 f(iy)e^{-ny}dy$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4=0$$

考虑到函数的周期性，$I_2+I_4=0$，因此得

$$\int_0^{2\pi} f(x)e^{nxi}dx=e^{-nb}\int_0^{2\pi} f(x+ib)e^{nxi}dx$$

故

$$c_{-n}=\frac{1}{2\pi}e^{-nb}\int_0^{2\pi} f(x+ib)e^{nxi}dx$$

设 $f(x)$ 在带域内满足

$$|f(x)|\leqslant M$$

由此得出

$$|c_{-n}|\leqslant Me^{-nb} \qquad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

同理可证得关于 c_n 的不等式。

(ii)反过来，设有不等式(9.18)存在，可以证明级数(9.17)式在带域 $-a<y<b$ 所包含的任意带域内为均一且绝对收敛，并在带域 $-a\leqslant y<b$ 内是一个周期为2π的正则解析函数。

(iii) 函数 $f(z)$ 的正则带域的量 α，β，由下式确定

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\sqrt[n]{\frac{1}{|c_n|}}\right]\\ \beta&=\lim_{n\to\infty}\left[\ln\sqrt[n]{\frac{1}{|c_{-n}|}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{9.19}$$

为了证明这一点，令公式(9.19)确定的数为 α，β，则对任意的 $\varepsilon>0$ 有充分大的数 n 使下列不等式成立

$$|c_{-n}|<e^{-n(\beta-\varepsilon)}, \quad |c_n|<e^{-n(\alpha-\varepsilon)}$$

根据(ii)和 $f(z)$ 在带域

$$-(\alpha-\varepsilon)<y<\beta-\varepsilon$$

内为正则的。但因 ε 为任意数，故 $f(z)$ 在带域

$$-\alpha<y<\beta$$

内为正则的。而且这个参量 α，β 所确定的带域是使 $f(z)$ 为正则的最大带域。否则由(i)可以得出：在不等式

$$|c_{-k}|\leqslant Me^{-nt} \quad (n=0, 1, 2, \cdots)$$

内能取$b>\beta$，或在不等式

$$|c_k| \leqslant Me^{-na} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots)$$

内能取$a>\alpha$。在这二种情况下，我们分别得到

$$\lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{1}{\sqrt[n]{|c_{-n}|}}\right]>\beta,\quad \lim_{n\to\infty}\left[\ln\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\right]>\alpha$$

这显然与题设相违背。从而证明(9.19)式成立。

（2）雅各比函数的傅里叶级数

雅各比椭圆函数是以实数为周期的有理型函数，能够在正则的闭带域内将它们展开成傅里叶级数。

首先考察函数 sn u

$$\mathrm{sn}2Kv=\mathrm{sn}(2Kv,\ k)$$

$$u=2Kv,\quad \tau=i\frac{K'}{K}$$

函数 sn u 的周期为$(4K, i2K')$，故 v 的周期为$(2, iK'/K)$，其中实数的周期为α。因为 sn u 是奇函数，故设其傅里叶展开式为

$$\mathrm{sn}2Kv=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin n\pi v$$

其系数公式

$$c_n=\int_{-1}^{1}\mathrm{sn}2Kv\sin n\pi v\,dv$$

该积分的计算可以藉助于求$\int \mathrm{sn}2Kve^{n\pi vi}dv$沿闭合路径的围道积分，闭合路径取以$A=-1$，$B=+1$，$C=2+\tau$，$D=\tau$为顶点的平行四边形。在该四边形中 sn$2Kv$ 有二个极点 $v=\tau/2$，$v=1+\tau/2$，利用 sn u 在极点 $u=iK'$ 的如下展开式

$$\mathrm{sn}(u+iK')=\frac{1}{ku}+\frac{1+k^2}{6k}u+\frac{7-22k^2+7k^4}{360k}u^3+\cdots \tag{9.20}$$

知 sn u 在极点处的留数为$1/k$。由此得被积函数在上述二个极点的留数分别是

$$\frac{e^{n\pi\frac{\tau}{2}i}}{2Kk}=\frac{q^{n/2}}{2Kk},\quad -\frac{e^{n\pi\left(1+\frac{\tau}{2}\right)i}}{2Kk}=-\frac{(-1)^n q^{n/2}}{2Kk}$$

由函数的周期性知，沿 BC 和 DA 两段的积分互相抵消。因此得

$$\left[1-(-1)^n\right]\frac{q^{n/2}}{2Kk}=\frac{1}{i2\pi}\left\{\int_{-1}^{1}-\int_{\tau}^{2+\tau}\right\}\operatorname{sn}2Kve^{n\pi vi}dv$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\int_{-1}^{1}\{\operatorname{sn}2Kve^{n\pi vi}-\operatorname{sn}2K(v+1+\tau)e^{n\pi(v+1+\tau)i}\}dv$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\int_{-1}^{1}\{1+(-1)^n q^n\}\operatorname{sn}2Kve^{n\pi vi}dv$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\{1+(-1)^n q^n\}\int_{-1}^{1}\operatorname{sn}2Kv\sin n\pi v dv$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\{1+(-1)^n q^n\}c_n$$

故得

$$c_n=\frac{\pi[1-(-1)^n]q^{n/2}}{kK[1+(-q)^n]}$$

显然 $c_{2n}=0$，只有 n 为奇数时 c_n 才不为零。最后得 $\operatorname{sn} u$ 的展开式

$$\operatorname{sn}2Kv=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\sin(2n-1)\pi v}{1-q^{2n-1}} \tag{9.21}$$

同样可求得

$$\operatorname{cn}2Kv=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\cos(2n-1)\pi v}{1+q^{2n-1}} \tag{9.22}$$

$$\operatorname{dn}2Kv=\frac{\pi}{2K}\left\{1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\cos 2n\pi v}{1+q^{2n}}\right\} \tag{9.23}$$

这些级数式在条带 $|I_m(v)|<\frac{1}{2}I_m(\tau)$ 中收敛。

为了得到 $\operatorname{ns} u$，$\operatorname{nc} u$，$\operatorname{nd} u$ 的展开式，须应用下列等式

$$\mathrm{sn}(u+iK')=\mathrm{sn}(u-K+K+iK')=k^{-1}\mathrm{dc}(u-K)$$
$$=k^{-1}\mathrm{ns}\,u \tag{9.24}$$

得

$$\mathrm{ns}2Kv=k\,\mathrm{sn}2K\left(v+\frac{\tau}{2}\right)$$
$$=\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}\sin\left[(2n-1)\pi\left(v+\frac{2}{\tau}\right)\right]}{1-q^{2n-1}}$$
$$=\frac{\pi}{iK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n-\frac{1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\left\{q^{n-\frac{1}{2}}e^{(2n-1)\pi vi}\right.$$
$$\left.-q^{-n+\frac{1}{2}}\times e^{-(2n-1)\pi vi}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{iK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}\left\{q^{2n-1}\left[e^{(2n-1)\pi vi}-e^{-(2n-1)\pi vi}\right]\right.$$
$$\left.-[1-q^{2n-1}]e^{-(2n-1)\pi vi}\right\}$$
$$=\frac{\pi}{K}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2q^{2n-1}\sin(2n-1)\pi v}{1-q^{2n-1}}+ie^{-(2n-1)\pi vi}\right\}$$

注意到上式第二项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(2n-1)\pi vi}=\frac{e^{-\pi vi}}{1-e^{-2\pi vi}}=\frac{1}{i2\sin\pi v}$$

代入后得

$$\mathrm{ns}2Kv=\frac{\pi}{2K}\left\{\csc\pi v+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}\sin(2n-1)\pi v}{1-q^{2n-1}}\right\} \tag{9.25}$$

同样可求得

$$\mathrm{nc}2Kv=\frac{\pi}{2k'K}\left\{\sec\pi v+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n-1}\cos(2n-1)\pi v}{1+q^{2n-1}}\right\} \tag{9.26}$$

$$\mathrm{nd}2Kv=\frac{\pi}{2k'K}\left\{1+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}\cos 2n\pi v}{1+q^{2n}}\right\} \quad (9.27)$$

同理得到其他六个函数的傅里叶级数式

$$\mathrm{cs}\,2Kv=\frac{\pi}{2K}\left\{\mathrm{ctg}\pi v-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2n\pi v}{1+q^{2n}}\right\} \quad (9.28)$$

$$\mathrm{sc}\,2Kv=\frac{\pi}{2k'K}\left\{\mathrm{tg}\pi v+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}\sin 2n\pi v}{1+q^{2n}}\right\} (9.29)$$

$$\mathrm{ds}2Kv=\frac{\pi}{2K}\left\{\csc\pi v-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}\sin(2n-1)\pi v}{1+q^{2n-1}}\right\} (9.30)$$

$$\mathrm{sd}2Kv=\frac{2\pi}{kk'K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\sin(2n-1)\pi v}{1+q^{2n-1}} (9.31)$$

$$\mathrm{cd}2Kv=\frac{2\pi}{kK}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\cos(2n-1)\pi v}{1-q^{2n-1}} \quad (9.32)$$

$$\mathrm{dc}2Kv=\frac{\pi}{2K}\left\{\sec\pi v-4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n-1}\cos(2n-1)\pi v}{1-q^{2n-1}}\right\}$$

$$(9.33)$$

这些级数式中除级数项外还包括有三角函数项的，其收敛域为

$$I_m(v)|<I_m(\tau)$$

其他级数的收敛域为

$$|I_m(v)|<\frac{1}{2}I_m(\tau)$$

雅各比函数 $z(u)$ 的傅里叶级数式为

$$z(2Kv)=\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}} \qquad (9.34\,\mathrm{A})$$

该式的证明见下一节。除了这个级数式外，还可将 $z(u)$ 展开 q 的级数式。由(3.128)式得

$$z(2Kv)=\frac{\Theta'(2Kv)}{\Theta(2Kv)}=\frac{\vartheta_4'(v)}{2K\vartheta_4(v)}=\frac{1}{2K}\frac{d}{du}\ln\vartheta_4(v)$$

将 $\vartheta_4(v)$ 的无穷乘积式(3.90)式代入上式，即得

$$z(2Kv)=\frac{2\pi}{K}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}\sin 2\pi v}{1+q^{2n-1}\cos 2\pi v+q^{4n-2}} \quad (9.34\,\mathrm{B})$$

§9.3 ϑ_k'/ϑ_k 的傅里叶级数式

西他函数的对数微分也具有实数周期，$v=1$，故可以在平行于实轴的条带内将其展开为傅里叶级数，其分析过程同雅各比函数。先研究 $\vartheta_4'(v)/\vartheta_4(v)$，考虑到它是奇函数，故

$$\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin 2n\pi v$$

$$c_n=2\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}\sin 2n\pi v\,dv$$

这个积分同样可以借助于围道积分法求得，围道四边形的顶点 $A=-\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{1}{2}+\tau$，$D=-\frac{1}{2}+\tau$。被积函数 $e^{2n\pi vi}$ $\vartheta_4'(v)/\vartheta_4(v)$ 在该四边形中仅有一个极点 $v=\tau/2$，在该极点的留数是

$$e^{n\pi\tau i}\frac{\vartheta_4'\left(\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_4\left(\frac{\tau}{2}\right)}=q^n$$

沿围道的 BC 和 DA 二段的积分应互相抵消，故有

$$q^n=\frac{1}{i2\pi}\left\{\int_{AB}+\int_{CD}\right\}\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}e^{2n\pi vi}dv$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\left\{\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}e^{2n\pi vi}dv\right.$$

$$\left.-\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\vartheta_4'(v+\tau)}{\vartheta_4(v+\tau)}e^{2n\pi(v+\tau)i}dv\right\}$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\left\{i\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}\sin 2n\pi v dv\right.$$

$$\left.-\int_{-1/2}^{1/2}\left[\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}-i2\pi\right]q^{2n}e^{2n\pi vi}dv\right\}$$

$$=\frac{1}{i2\pi}\left\{i\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}\sin 2n\pi v dv\right.$$

$$\left.-iq^{2n}\int_{-1/2}^{1/2}\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}\sin 2n\pi v dv\right\}$$

$$=\frac{1}{4\pi}(1-q^{2n})c_n$$

由此得

$$\frac{\vartheta_4'(v)}{\vartheta_4(v)}=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}} \tag{9.35}$$

由关系式(3.128)即得到(9.34 A)式。

用 $v+\frac{1}{2}$替换 v，应用(3.72)式得

$$\frac{\vartheta_3'(v)}{\vartheta_3(v)}=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^n\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}} \tag{9.36}$$

在(9.35)式中用 $v-\frac{\tau}{2}$替代 v 得

$$\frac{\vartheta_4'\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_4\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin\left[2n\pi\left(v-\frac{\tau}{2}\right)\right]}{1-q^{2n}}$$

$$=\frac{2\pi}{i2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\left\{q^{-n}e^{2n\pi vi}-q^n e^{-2n\pi vi}\right\}$$

$$=\frac{4\pi}{i2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n}}\left\{q^{2n}(e^{2n\pi vi}-e^{-2n\pi vi})\right.$$

$$\left.+e^{2n\pi vi}(1-q^{2n})\right\}$$

$$=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}}+\frac{4\pi}{i2}\sum_{n=1}^{\infty}e^{2n\pi vi}$$

由关系式

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{nxi}=\frac{e^{xi}}{1-e^{xi}}=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$$

从而得

$$\frac{\vartheta_4'\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_4\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}=4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}}+i\pi+\pi\operatorname{ctg}\pi v$$

应用关系式

$$\vartheta_4(v)=-iq^{1/4}e^{\pi vi}\vartheta_1\left(v+\frac{\tau}{2}\right)$$

得

$$\frac{\vartheta_4'\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}{\vartheta_4\left(v-\frac{\tau}{2}\right)}=i\pi+\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}$$

因此得到 $\vartheta_1'(v)/\vartheta_1(v)$是

$$\frac{\vartheta_1'(v)}{\vartheta_1(v)}=\pi\operatorname{ctg}\pi v+4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}} \tag{9.37}$$

将上式中 v 用 $v+\frac{1}{2}$替换，考虑到 $\vartheta_2(v)=\vartheta_1\left(v+\frac{1}{2}\right)$得

$$\frac{\vartheta_2'(v)}{\vartheta_2(v)}=-\pi\operatorname{tg}\pi v+4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n q^{2n}\sin 2n\pi v}{1-q^{2n}} \tag{9.38}$$

级数(9.35)和(9.36)式的收敛条件是

$$|I_m(v)|<\frac{1}{2}I_m(\tau)$$

而级数(9.37)和(9.38)的收敛条件是

$$|I_m(v)|<I_m(\tau)。$$

第十章　椭圆函数的保角映射

本章研究椭圆函数在保角映射方面的应用，但不以具体工程技术课题为对象，而是分析具有典型性的函数本身。本章前部分包括基本椭圆函数，拟椭圆函数和椭圆积分在单连通域的保角映射问题；后部分讨论了双连通域多角形的保角映射问题。各种情况均可表示为相应的许瓦兹-克力斯托弗尔(Schwarz-Crystoffel)变换式形式。

§10.1　雅各比函数的映射

本节要研究几个基本雅各比椭圆函数所构成的保角映射，并假定是“实数”型的，即k是实数（$0<k<1$），$\omega_1(=\omega)$是实数，$\omega_2(=\omega')$是虚数，K和K'是实数。设变量u（$\mathrm{Re}\,u=u_1$，$\mathrm{Im}\,u=u_2$）和w（$\mathrm{Re}\,w=w_1$，$\mathrm{Im}\,w=w_2$）存在下列函数关系

$$w=F(u)$$

式中F是椭圆函数。该函数在二个面上映像的对应点用相同符号表示。

（1）函数$w=\mathrm{sn}\,u$

这是我们比较熟悉的一种变换函数，它的等效形式

$$\frac{du}{dw}=\{(1-w^2)(1-k^2w^2)\}^{-1/2}$$

$$\left(u=\int_0^w\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right)\tag{10.1}$$

是许瓦兹-克力斯托弗尔变换式。它将u平面上以0，K，$K+iK'$，iK'为顶点的四边形映射为w面的第一象限，而四边形$-K$，K，$K+iK'$，$-K+iK'$映射为w的上半平面，切割从$-\infty$到1和从1到∞。$u=iK'$点对应w平面上实轴的无限远点

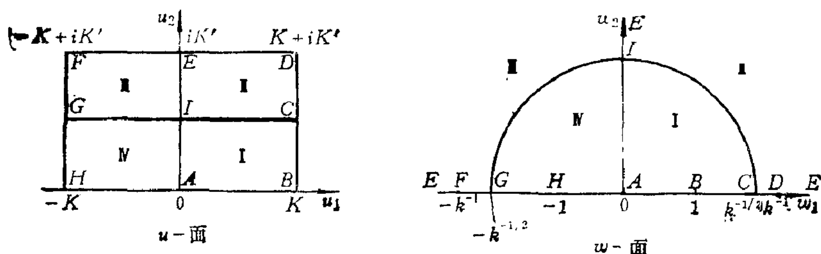


图10.1 $w=\mathrm{sn}\,u$ 的映像

E，如图10.1所示。

现在就变换函数的展开式来说明二个面上映像间的关系。应用函数 sn 的加法公式(5.30)，及下列“虚”变换式(参见(7.23)～(7.25)式)

$$\mathrm{sn}(iu,k)=i\frac{\mathrm{sn}(u,k')}{\mathrm{cn}(u,S')}\qquad \mathrm{cn}(iu,k)=\frac{1}{\mathrm{cn}(u,k')}$$

$$\mathrm{dn}(iu,k)=\frac{\mathrm{dn}(u,k')}{\mathrm{cn}(u,k')}\tag{10.2}$$

可以得到

$$\begin{aligned}w&=w_1+iw_2=\mathrm{sn}(u_1+iu_2,k)\\&=[\mathrm{sn}(u_1,k)\mathrm{cn}(iu_2,k)\mathrm{dn}(iu_2,k)+\mathrm{sn}(iu_2,k)\mathrm{cn}(u_1,\\&\quad k)\mathrm{dn}(u_1,k)]/[1-k^2\mathrm{sn}^2(u_1,k)\mathrm{sn}^2(iu_2,k)]\\&=[\mathrm{sn}(u_1,k)\mathrm{dn}(u_2,k')+i\,\mathrm{sn}(u_2,k')\mathrm{cn}(u_1,k)\mathrm{cn}(u_2,k')\\&\quad\mathrm{dn}(u_1,k)]/[\mathrm{cn}^2(u_2,k')+k^2\mathrm{sn}^2(u_1,k)\mathrm{sn}^2(u_2,k')]\end{aligned}\tag{10.3}$$

$w_2=0$ 时，导致下列因子为 0

$$\mathrm{sn}(u_2,k')=0,\quad \mathrm{cn}(u_1,k)=0,\quad \mathrm{cn}(u_2,k')=0$$

由(10.2)式得

$$\mathrm{sn}(iu_2,k)=0,\ \mathrm{cn}(u_1,k)=0,\mathrm{cn}(iu_2,k)=\infty$$

故应有 $u_2=2mK'$, $u_1=(2m+1)K$, $u_2=(2m+1)K'$. 根据图2.4，当 u 在周期四边形周界上移动时，w 取实数值，故图10.1中 u 面的矩形周界被变换成 w 面上的实轴。

再研究 u 面上 $u=\frac{1}{2}iK$ 的直线 CG 在 w 面上的映像。因为

$$\mathrm{sn}\left(\frac{1}{2}iK',\ k\right)=i\frac{1}{\sqrt{k}},\ \mathrm{cn}\left(\frac{1}{2}iK',\ k\right)=\sqrt{\frac{1+k}{k}},$$

$$\mathrm{dn}\left(\frac{1}{2}iK',\ k\right)=\sqrt{1+k}$$

代入(10.3)式，得

$$w_1+iw_2=\frac{(1+k)\mathrm{sn}(u_1,\ k)+i\,\mathrm{cn}(u_1,\ k)\mathrm{dn}(u_1,\ k)}{\sqrt{k}\left[1+k\mathrm{sn}^2(u_1,\ k)\right]} \tag{10.4}$$

$$|w|=w_1^2+w_2^2=\frac{1}{k}$$

又知

$$u=\frac{1}{2}iK',\quad w=\mathrm{sn}\left(\frac{1}{2}iK',\ k\right)=i\frac{1}{\sqrt{k}}$$

可见w上半平面以$1/\sqrt{k}$为半径的圆周是u面直线CG的映像。这个半圆周和w_2轴是区域Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ的分界线，分别对应u面上的四个矩形。

对于$u_1=\text{const}$，$u_2=\text{const}$ 在w面的映像可以讨论如下：

如图10.2(a)所示，w面上任意点到实轴上$w_1=1/k$，1，-1，$-1/k$各点的距离分别是R，r，r'，R'。由(10.3)式可以得到

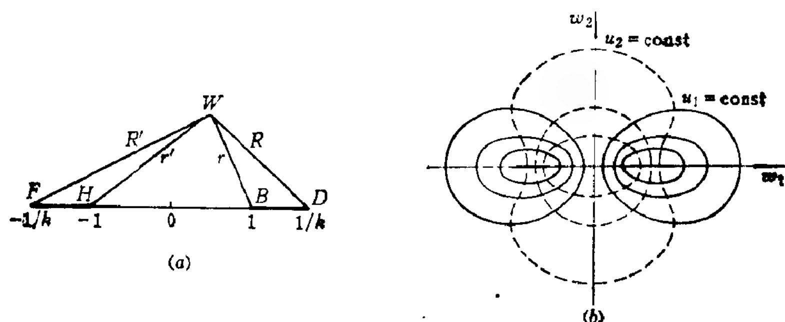


图10.2　w面的映像　$u_1=\text{const}$，$u_2=\text{const}$

$$
\left.\begin{aligned}
r &= wB = |\operatorname{sn} u - 1| = \frac{1-\operatorname{sn}(u_1, k)\operatorname{dn}(u_2, k')}{\sqrt{1-\operatorname{dn}^2(u_1, k)\operatorname{sn}^2(u_2, k')}} \\
r' &= wH = |\operatorname{sn} u + 1| = \frac{1+\operatorname{sn}(u_1, k)\operatorname{dn}(u_2, k')}{\sqrt{1-\operatorname{dn}^2(u_1, k)\operatorname{sn}^2(u_2, k')}} \\
R &= wD = \left|\operatorname{sn} u - \frac{1}{k}\right| = \frac{\operatorname{dn}(u_2, k') - k\operatorname{sn}(u_1, k)}{k\sqrt{1-\operatorname{dn}^2(u_1, k)\operatorname{sn}^2(u_2, k')}} \\
R' &= wF = \left|\operatorname{sn} u + \frac{1}{k}\right| = \frac{\operatorname{dn}(u_2, k') + k\operatorname{sn}(u_1, k)}{k\sqrt{1-\operatorname{dn}^2(u_1, k)\operatorname{sn}^2(u_2, k')}}
\end{aligned}\right\} \tag{10.5}
$$

由此得

$$
\begin{aligned}
\frac{r'+r}{1} &= \frac{r'-r}{\operatorname{sn}(u_1, k)\operatorname{dn}(u_2, k')} = \frac{R'+R}{\operatorname{dn}(u_2, k')/k} \\
&= \frac{R'-R}{\operatorname{sn}(u_1, k)} = \frac{2}{\sqrt{1-\operatorname{dn}^2(u_1, k)\operatorname{sn}^2(u_2, k')}}
\end{aligned} \tag{10.6}
$$

$u_1=\text{const}$ 和 $u_2=\text{const}$ 的曲线方程可以表示成各种形式。例如 $u_1=\text{const}$ 曲线可以取下列二种形式之一

$$
\left.\begin{aligned}
R'-R &= (r'+r)\operatorname{sn}(u_1, k) \\
r'-r &= (R'+R)k\operatorname{sn}(u_1, k)
\end{aligned}\right\} \tag{10.7}
$$

$u_2=\text{const}$ 曲线可以取下列形式之一

$$
\left.\begin{aligned}
r'-r &= (R'-R)\operatorname{dn}(u_2, k') \\
R'+R &= (r'+r)k^{-1}\operatorname{dn}(u_2, k')
\end{aligned}\right\} \tag{10.8}
$$

这些曲线是双圆四次曲线（bicircular quartic curve），焦点是 ± 1 和 $\pm 1/k$。这些四次线既对 w_1 轴又对 w_2 轴呈对称分布。$u_1=\text{const}$ 的线有二个分族，其环绕 BD 的一族对应 $u_1>0$，而环绕 FH 的另一族对应 $u_1<0$，而 w_2 轴($u_1=0$)是二个分族的界线。$u_2=\text{const}$ 的四次线是包围 HB 的卵形线，$u_2=\pm\frac{1}{2}K'$ 对应一个圆。w 面上分布曲线见图10.2。

当 $k\to 0$ 时，这些曲线蜕变成共焦椭圆和双曲线（决定于关系式 $w=\sin u$）。当 $k\to 1$ 时，它们蜕变成二个同心圆族（决定

于$w=\text{th}\,u$)。

应当指出，$w-u$平面间的这种映射是保角（保形）的，由于

$$\frac{dw}{du}=\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u$$

故在图10.1的矩形$ABDE$中，在B，D点上$\dfrac{du}{dw}=0$，而在E点$w=\text{sn}\,u$有一单极点，如果除去B，D，E点，则$\text{sn}\,u$在各点上是正则的。

（2）函数$w=\text{sn}^2 u$

方程$w=\text{sn}^2 u$可以分解成

$$w=z^2\ ,\quad z=\text{sn}\,u \tag{10.9}$$

因此u面上的矩形$ABDE$被映射成w的上半平面，四边形边界上各点映射为w面的实轴，如图10.3示。

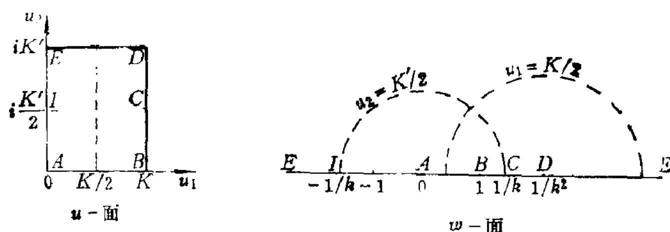


图10.3　$w=\text{sn}^2u$的映射

现在来分析$u_1=\text{const}$和$u_2=\text{const}$在w面的映像。令上半面上任意点w到$w=0$，1，$1/k^2$点的距离为r，r_1，r_2，即

$$\begin{aligned} r&=wA=|\text{sn}^2u|\\ r_1&=wB=|\text{sn}^2u-1|=|\text{cn}^2u|\\ r_2&=wD=|\text{sn}^2u-1/k^2|=|\text{dn}^2u/k^2| \end{aligned} \tag{10.10}$$

为了得到上式的结果，在(10.3)式的二边用$-u_2$替代u_1，则得

$$\text{sn}(u_1+iu_2)=w_1+iw_2,\quad \text{sn}(u_1-iu_2)=w_1-iw_2$$

或

$$\text{sn}(u_1+iu_2)\,sn(u_1-iu_2)=w_1^2+w_2^2$$

又因为$|w_1+iw_2|^2=(w_1+iw_2)(w_1-iw_2)$，故得

$$|\mathrm{sn}u|^2=|\mathrm{sn}(u_1+iu_2)|^2=\mathrm{sn}(u_1+iu_2)\mathrm{sn}(u_1-iu_2)$$
$$=\mathrm{sn}u\,\mathrm{sn}\bar{u} \tag{10.11}$$

由于

$$\mathrm{sn}(u_1+iu_2)\mathrm{sn}(u_1-iu_2)=\frac{\mathrm{sn}^2u_1-\mathrm{sn}^2iu_2}{1-k^2\mathrm{sn}^2u_1\mathrm{sn}^2iu_2}$$
$$=\frac{\mathrm{cn}2iu_2-\mathrm{cn}2u_1}{\mathrm{dn}2iu_2-\mathrm{dn}2u_1}$$

最后得

$$|\mathrm{sn}(u_1+iu_2,\ k)|^2=\frac{1-\mathrm{cn}^2(u_1,\ k)\mathrm{cn}^2(u_2,k')}{1-\mathrm{dn}^2(u_1,\ k)\mathrm{sn}^2(u_2,k')}$$
$$=\frac{1-\mathrm{cn}(2u_1,\ k)\mathrm{cn}(2u_2,k')}{\mathrm{dn}(2u_2,k')+\mathrm{dn}(2u_1,\ k)\mathrm{cn}(2u_1,k')} \tag{10.12}$$

同理得

$$|\mathrm{cn}(u_1+iu_2,\ k)|^2=\frac{1-\mathrm{sn}^2(u_1,\ k)\mathrm{dn}^2(u_2,k')}{1-\mathrm{dn}^2(u_1,\ k)\mathrm{sn}^2(u_2,k')}$$
$$=\frac{\mathrm{dn}(2u_1,\ k)+\mathrm{cn}(2u_1,\ k)\mathrm{dn}(2u_2,k')}{\mathrm{dn}(2u_2,k')+\mathrm{dn}(2u_1,\ k)\mathrm{cn}(2u_2,k')} \tag{10.13}$$

$$|\mathrm{dn}(u_1+iu_2,\ k)|^2=\frac{\mathrm{dn}^2(u_2,k')-k^2\mathrm{sn}(u_1,\ k)}{1-\mathrm{dn}^2(u_1,\ k)\mathrm{sn}^2(u_2,k')}$$
$$=\frac{\mathrm{dn}(2u_1,\ k)+\mathrm{cn}(2u_1,\ k)\mathrm{dn}(2u_2,k')}{1+\mathrm{cn}(2u_1,\ k)\mathrm{cn}(2u_2,k')} \tag{10.14}$$

利用(10.12)～(10.14)式，由(10.10)式得

$$r_1-r\mathrm{dn}(2u_1,\ k)=\mathrm{cn}(2u_1,\ k) \tag{10.15}$$
$$r\mathrm{dn}(2u_2,k')+r_1\mathrm{cn}(2u_2,k')=1 \tag{10.16}$$

由(10.15)式得 $u_1=\mathrm{cost}$ 曲线族是笛卡尔卵形线(Cartesian Ovals)族，而$u_1=\frac{1}{2}K$的线是一个圆满足

$$\frac{r'}{r}=k' \quad 或\left|w-\frac{1}{k^2}\right|=\frac{k'}{k^2} \tag{10.15A}$$

由(10.16)式得 $u_2=\text{const}$ 曲线也是笛卡尔卵形线族，$u_2=\frac{1}{2}K'$ 的线也一个圆，满足

$$r=\frac{1}{k} \quad 或 \quad |w|=\frac{1}{k} \tag{10.16A}$$

（3）函数 $w=\text{cn}\,u$，$w=\text{cn}^2u$

先研究 $w=\text{cn}^2u$。令

$$w=1-z \quad , \quad z=\text{sn}^2u \tag{10.17}$$

这样即可以由 sn^2u 的结果推导出 cn^2u。由图10.3得 cn^2u 的图形如图 10.4。$u_1=\frac{K}{2}$ 及 $u_2=\frac{K'}{2}$ 的二个圆分别是

$$\left.\begin{aligned} u_1=\frac{1}{2}K: \quad \left|w+\frac{k'}{k}\right|=\frac{k'}{k^2} \\ u_2=\frac{1}{2}K': \quad |w-1|=\frac{1}{k} \end{aligned}\right\} \tag{10.18}$$

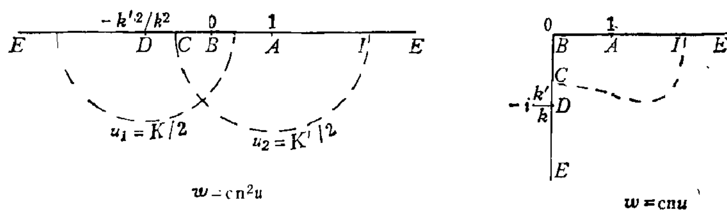


图10.4　cn^2u和$\text{cn}\,u$ 的映像

对于函数 $w=\text{cn}u$，由(10.17)式得

$$w=\sqrt{1-z}, \quad z=\text{sn}^2u \tag{10.19}$$

或

$$(1-w)(1+w)=\text{sn}^2u \tag{10.20}$$

在前面分析 $\text{sn}u$时已知，u 平面上$u_2=\frac{1}{2}K'$ 的线对应 $|\text{sn}u|=1/\sqrt{k}$，即 w 面上得到以$1/\sqrt{k}$为半径的圆周。将此值代入(10.20)式，得

$$|w-1||w+1|=\frac{1}{k}, \left(u_2=\frac{1}{2}K'\right)$$

该式所对应的曲线称作卡西尼(Cassinian)曲线。$w = \mathrm{cn}u$的映射见图10.5，二面上相应点坐标为

	A	B	D	E	F	H	C	I	G
u:	0	K	$K+iK'$	iK'	$-K+iK'$	$-K$	$K+i\frac{K'}{2}$	$\frac{1}{2}iK'$	$-K+i\frac{K'}{2}$
w:	1	0	$-i\frac{k'}{k}$	∞	$i\frac{k'}{k}$	0	$-i\sqrt{\frac{1-k}{k}}$	$\sqrt{\frac{1+k}{k}}$	$i\sqrt{\frac{1-k}{k}}$

这种变换的积分形式是

$$u = \int_w^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(k'^2+k^2t^2)}}, \quad k'^2+k^2 = 1 \tag{10.21}$$

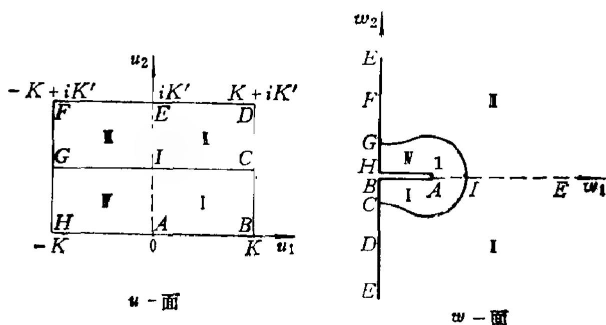


图10.5 $w = \mathrm{cn}\, u$ 的映射

（4） 函数$w = \mathrm{dn}u$, $w = \mathrm{dn}^2u$

对于$w = \mathrm{dn}^2u$, 令

$$w = 1 - k^2z \quad, \quad z = \mathrm{sn}^2u \tag{10.22}$$

由图10.3得 dn^2u 的图形如图 10.6。$u_1 = \frac{1}{2}K$和$u_2 = \frac{1}{2}K'$的二个圆分别是

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}K, \quad |w| = k' \\ u_2 &= \frac{1}{2}K': \quad |w-1| = k \end{aligned}\right\} \tag{10.23}$$

对于函数$w = \mathrm{dn}u$, 有

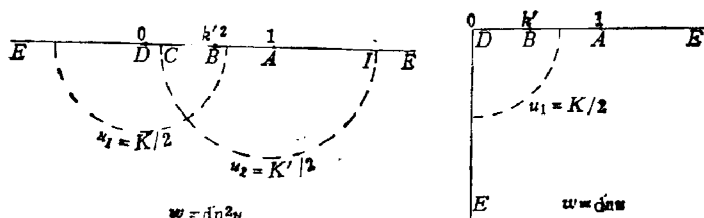


图10.6 由sn^2u得dn^2u和$dn\,u$

$$\left.\begin{aligned} w &= \sqrt{1-k^2z}, \quad z = sn^2u \\ (1-w)(1+w) &= k^2 sn^2 u \end{aligned}\right\} \tag{10.24}$$

因此$u_2=\frac{1}{2}K'$在w面的映像满足方程

$$|w-1||w+1|=k \quad \left(u_2=\frac{1}{2}K'\right)$$

这也是卡西尼曲线。$w=dnu$的映射见图10.7，图中相应点坐标为

	A	B	D	E	F	H	C	I	G
u:	0	K	$K+iK'$	iK	$-K+iK'$	$-K$	$K+i\frac{K'}{2}$	$i\frac{K'}{2}$	$-K+i\frac{K'}{2}$
w:	1	k'	0	∞	0	k'	$\sqrt{1-k}$	$\sqrt{1+k}$	$\sqrt{1-k}$

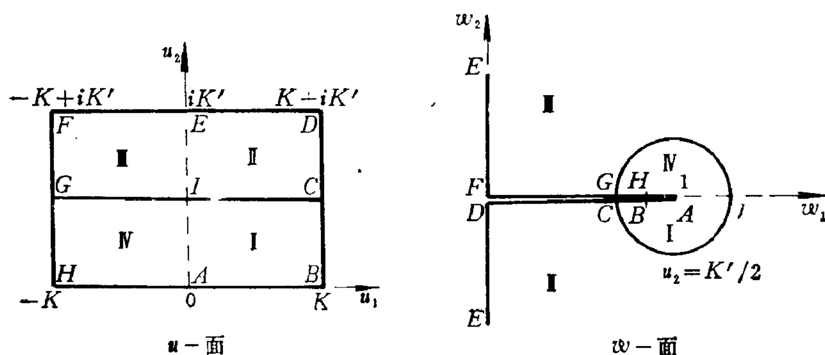


图10.7 $w=dn\,u$ 的映射

该变换的积分形式是

$$u=\int_{w}^{1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(t^2-k'^2)}},\quad k'^2+k^2=1 \qquad (10.25)$$

§10.2 函数$\mathscr{P}$的映射

函数$\mathscr{P}u$的周期为(2ω, $2\omega'$)，其在周期四边形（单位胞腔）上的分布已在第二章讨论过，这里采用下列次序

$$\begin{gathered}\omega_1=\omega,\quad \omega_2=-\omega-\omega',\quad \omega_3=\omega'\\ e_1=\mathscr{P}\omega_1,\quad e_2=\mathscr{P}\omega_2,\quad e_3=\mathscr{P}\omega_3\\ e_1+e_2+e_3=0\end{gathered} \qquad (10.26)$$

使满足$e_1>e_2>e_3$。$w=\mathscr{P}u$所相应的许瓦兹-克力斯托弗尔公式是

$$\begin{aligned}z&=\int_{\infty}^{w}\frac{dt}{\sqrt{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}}\\ &=\int_{\infty}^{w}\frac{dt}{\sqrt{4t^2-g_2t-g_3}}\end{aligned} \qquad (10.27)$$

它将u面上四边形$ABCD$的内域映射成w的下半平面(见图10.8)。当u沿四边形周界由$0-\omega_1-\omega+\omega'-\omega'-0$时，$w$为实数，其值由$\infty-e_1-e_2-e_3--\infty$而减小。运用对称性开拓原理，$u$面上四边形$AFEB$映射成$w$的上半平面，$u$沿该四边形移动时，$w$从$-\infty-e_1$。

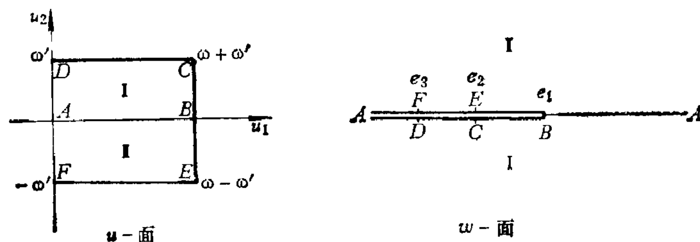


图10.8 $w=\mathscr{P}u$的映射

当 $g_3=0$，$g_2>0$，得 $e_2=0$，$e_3=-e_1$。u 面上四边形变成正方形，对角线 AC 映射成 w 面的 $-u_2$ 轴，而对角线 BD 在 w 面的映像是以 $e_2=0$ 为圆心，e_1 为半径的下半圆周。以正方形 $ABCD$ 的中心点 $\left(\frac{1}{2}(\omega+\omega')\right)$ 和 B，C 二点所构成的等腰三角形映射成 w 面上以 e_1 为半径圆的第四象限。

§ 10.3　函数 $\zeta(u)+eu$ 的映射

研究函数

$$w=\zeta(u)+e_k u \qquad k=1,\ 2,\ 3 \tag{10.28}$$

$$u=u_1+iu_2$$

显然 $\zeta(u_1)$ 是实数函数，$\zeta(iu_2)$ 是虚数函数。该函数将 u 平面以 0，ω，$\omega+\omega'$，ω' 为顶点的四边形的水平边 AB，CD 映射为 w 面（$k=1$，2，3）上的水平线，而 AD 和 BC 映射为 w 面上的垂直线。A，B，C，D 四点的 w 值如下

$$w(0)=\infty \qquad w(\omega)=\eta+e_k\omega$$

$$w(\omega+\omega')=\eta+\eta'+e_k(\omega+\omega')$$

$$w(\omega')=\eta'+e_k\omega'$$

令

$$H_k=\eta+e_k\omega \qquad iH'_k=\eta'+e_k\omega'$$

可以证明[1]

$$H_1>H_2>0>H_3,\ H'_1>0>H'_2>H'_3$$

对于 $k=1$，2，3 三种情况下，上述 u 面四边形在 w 面的映像见图 10.9，各图中 $ABCDA$ 的左方域是 u 面四边形内域的映像。

运用对称性开拓原理可以得到如下结果。函数 $w=\zeta(u)+e_1u$ 将 u 面上以 $\pm\omega$，$\pm\omega+2\omega'$ 为顶点的四边形，映射为 w 面以 $\pm H_1$，$\pm H_1+2iH'_1$ 为角的二个无穷条带的外域。函数 $w=\zeta(u)+e_2u$ 将 u 面上 $\pm\omega\pm\omega'$ 的四边形，映射为 w 面上以 $\pm H_2\pm iH'_2$ 为

[1] 参见Erdélyi, "Higher Transcendental functions", Vol. Ⅱ, New York-Toronto-London, 1953, P. 380

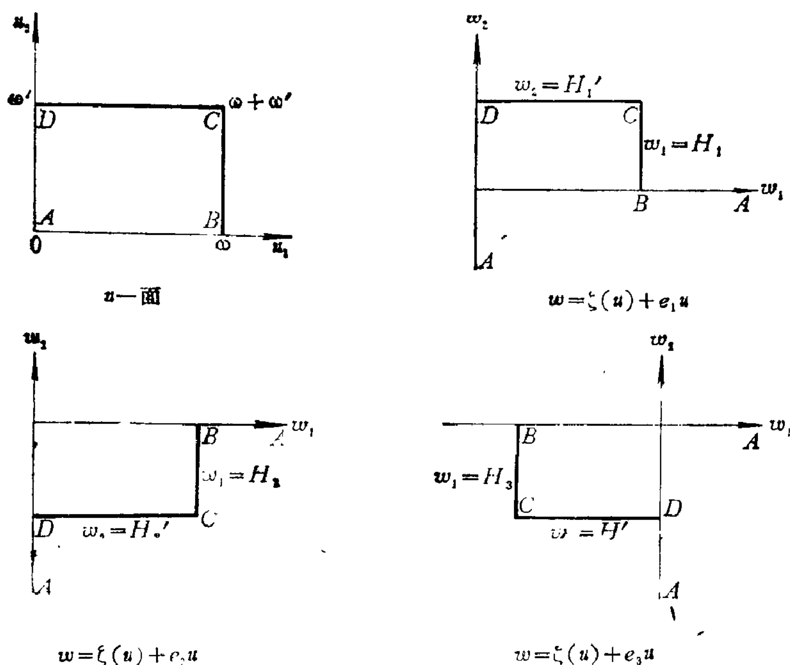


图10.9　u 面基本四边形在 w 面的映象

顶点四边形的外域。函数 $w=\zeta(u)+e_3u$ 将 u 面 $\pm\omega'$，$2\omega\pm\omega'$ 的四边形，映射为 w 面上以 $\pm iH_3'$，$2H_3\pm iH_3'$ 为角的二个铅垂半无限条带的外域。三个函数所对应的映射见图 10.10。

变换函数（10.28）的另一种形式为

$$
\frac{dw}{ds}=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}(s-e_1)^{1/2}(s-e_2)^{-1/2}(s-e_3)^{-1/2} & k=1\\[2ex] -\dfrac{1}{2}(s-e_1)^{-1/2}(s-e_2)^{1/2}(s-e_3)^{-1/2} & k=2\\[2ex] -\dfrac{1}{2}(s-e_1)^{-1/2}(s-e_2)^{-1/2}(s-e_3)^{1/2} & k=3\end{cases}
$$

$$
s=\mathscr{P}u \tag{10.29}
$$

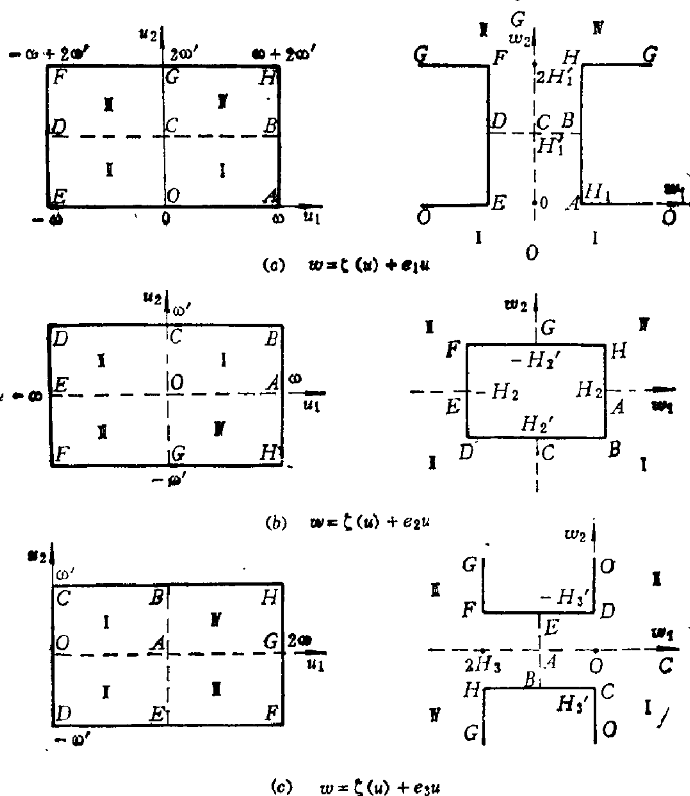


图10.10 函数 $w=\zeta(u)+e_ku$的映射

§10.4 第二种椭圆积分的映射

首先分析勒让德第二种标准椭圆积分，由§3.3得

$$
\begin{aligned}
E&=\int_0^t\sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt\\
&=\int_0^u \mathrm{dn}^2u\,du \quad (t=\mathrm{sn}u) \qquad (10.30)
\end{aligned}
$$

$$
E=E_1+iE_2,\quad t=t_1+it_2
$$

上述E-t积分式是一种许瓦兹-克力斯托弗尔变换式。该变换将E面上的多角形域映射为t的上半个平面，如图10.11所示。E面上坐标a，b分别由全椭圆积分E，K'和E'表示。

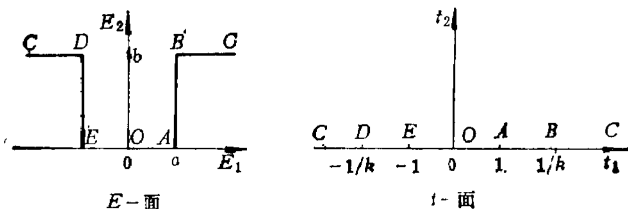


图10.11　E函数的映射

现在研究下列第二种椭圆积分

$$z=\int_0^t \frac{(a-t)dt}{\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} \tag{10.31A}$$

$$=\int_0^u \frac{(a-u^2)du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\quad (t=u^2) \tag{10.31B}$$

$$=\int_0^\eta (a-\mathrm{sn}^2\eta)d\eta \quad (u=\mathrm{sn}\,\eta) \tag{10.31C}$$

$$z=z_1+iz_2,\quad t=t_1+it_2,\quad u=u_1+iu_2,\quad \eta=\eta_1+i\eta_2$$

这个积分除参数k外还取决于a值的选择。用常数k^2乘（10.31C）式，可以得到下列三种特殊情形

$$a=0,\quad z=-k^2\int_0^\eta \mathrm{sn}^2\eta d\eta=E(\eta)-\eta \tag{10.32}$$

$$a=1,\quad z=k^2\int_0^\eta \mathrm{cn}^2\eta d\eta=E(\eta)-k'^2\eta \tag{10.33}$$

$$a=\frac{1}{k^2},\quad z=\int_0^\eta \mathrm{dn}^2\eta d\eta=E(\eta) \tag{10.34}$$

按（10.31）式，在η，u，t面映像示于图10.12。式（10.31A）将z面的多角形域映射为t的上半平面。当a从$-\infty$到$+\infty$变化时，z面的映像见图10.13，共有15个分布图。除$a=0$，$a=1$，$a=1/k^2$外，当t从左向右沿实轴t_1穿过$t=0$，$t=1$，$t=1/k^2$点时，z沿多角形周界各向左方转动$\pi/2$角度一次。在图上这些点分别标为0，A，B。当t穿过$t=a$点时，相应z向右转动角度π，亦即转动后z的方向与转动前

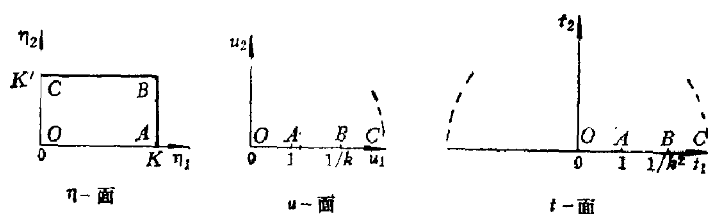


图10.12　η，u，t 面上的映像

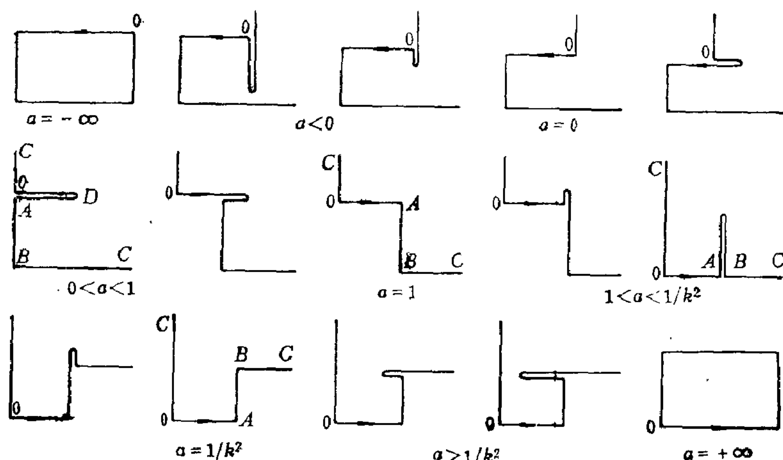


图10.13　z 面上的映像（a 变化）

相反。当 $a=0$，$a=1$，$a=1/k^2$ 时，对应于 $t=0$，$t=1$，$t=1/k^2$ 点，z 点向右转动 $\pi/2$ 角度。$t=a$ 的点及 z 面上的相应点均标以符号 D。当 $a=0$，$a=1$，$a=1/k^2$ 时，D 点分别与 0，A，B 点相重合，图中第四，第八，第十二图分别对应这几种特殊情形。由图 10.13 各个小图亦可看出这种变化的过程。

当 t 很大时，近似有

$$z=H\int t^{-1/2}dt=2Ht^{1/2}$$

式中 H 是常数。因此当 t 面上动点 t 画出无限大半圆周时，z 画出圆的 1/4(图 10.13 中未画出)。

通过以上分析，可见通过（10.34）或（10.30）式可以将 η 面以 $\pm K$，$\pm K+iK'$ 为顶点的矩形内域映射为图 10.11 E 面上多角形 $OABCDE$ 域，（图 10.13 中第 12 图是其一半）。各对应点坐标是

A 点：$\eta=K$，$z=E$

B 点：$\eta=K+iK'$，$z=E+i(K'-E')$

故有

$$\frac{AB}{OA}=\frac{K'-E'}{E}$$

由此式可得到实现该变换的参数 k。可以看出 $\eta=\frac{1}{2}K+i\eta_2$，对应 $|d\eta/dz|=$常数的曲线，该曲线上任一点，下式成立

$$\left|\frac{d\eta}{dz}\right|=\left|\frac{dz}{d\eta}\right|^{-1}=\left|\mathrm{dn}^2\left(\frac{1}{2}K+i\eta_2\right)\right|^{-1}=\frac{1}{k'}.$$

§10.5 第三种椭圆积分的映射

考察雅各比第三种椭圆积分，令 $\nu=1/(k^2\mathrm{sn}^2a)$，则由（6.28）式得

$$\begin{aligned} z=\Pi(u,\ a)&=\int_0^u\frac{k^2\mathrm{sn}\,a\ \mathrm{cn}\,a\ \mathrm{dn}\,a\ \mathrm{sn}^2u}{1-k^2\mathrm{sn}^2a\ \mathrm{sn}^2u}du \\ &=\frac{\mathrm{cn}\,a\ \mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\int_0^u\frac{\mathrm{sn}^2u}{\nu-\mathrm{sn}^2u}du \end{aligned} \tag{10.35}$$

令 $t=\mathrm{sn}^2u$，得

$$z=\frac{\mathrm{cn}\,a\ \mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\int_0^t\frac{tdt}{(\nu-t)\sqrt{4t(1-t)(1-k^2t)}} \tag{10.36}$$

假定 $0<a<K$，因此 $\mathrm{sn}\,a$ 是实数，并有 $\nu>1/k^2>1$。（10.36）式将 z 面多角形内域映射成 t 的上半平面，而 t 与 u 间关系是已知的。u，t，z 面映像见图 10.14。

当 t 由 0 沿实轴正向移动，在 $t=0-1$ 之间，dz 是正实数，故 z 沿实轴由 $0-A$ 点。在 A，B 二点处，z 线段走向分别左

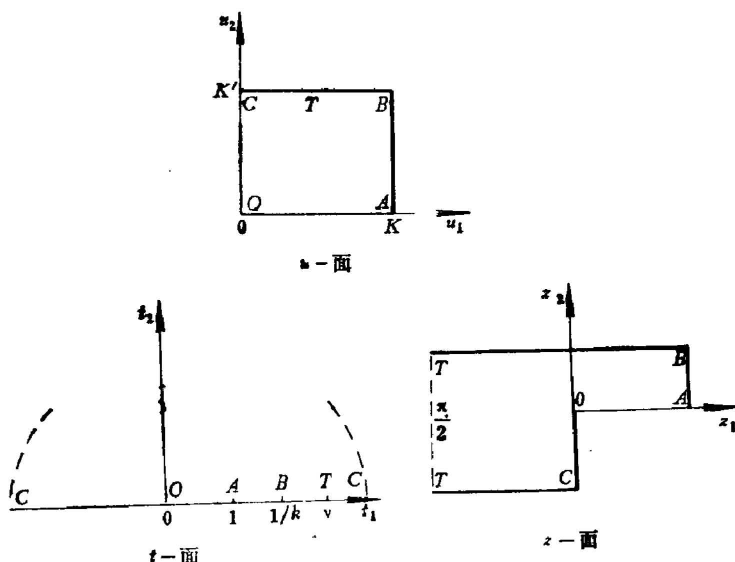


图10.14 第三种椭圆积分的映射

转$\pi/2$，使得z面上由$B—T$线段方向与$0—A$方向相反。当$t\to\nu$时，(10.36) 式积分趋于无限大，故z沿BT移向无限远处。在$t=\nu=1/(k^2\mathrm{sn}^2 a)$处，有

$$(4t)^{1/2}=2/(k\mathrm{sn}\,a)$$

$$(1-t)^{1/2}=(t-1)^{1/2}e^{-\pi i/2}=-i(t-1)^{1/2}=-i\mathrm{dn}\,a/(k\mathrm{sn}\,a)$$

$$(1-k^2t)^{1/2}=(k^2t-1)^{1/2}e^{-\pi i/2}=-i(k^2t-1)^{1/2}=-i\mathrm{cn}\,a/\mathrm{sn}\,a$$

由此得在$t=\nu$点 (10.36) 式被积函数的留数（包括积分号前常数）为

$$\frac{\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a}\;\frac{1/(k^2\mathrm{sn}^2 a)}{-[2/(k\mathrm{sn}\,a)][-i\mathrm{dn}\,a/(k\mathrm{sn}\,a)](-i\mathrm{cn}a/\mathrm{sn}a)}$$

$$=\frac{1}{2}$$

若在$t=\nu$点，取一环绕该点的正向小圆周，则根据围道积分原

理，(10.36) 式积分等于 $i2\pi\times\frac{1}{2}=i\pi$。令 t 沿该小半圆周反向移动，故积分值应是 $-\frac{1}{2}i\pi$。与 t 面该小圆周相对应，z 点应在负虚轴方向上“跳跃”距离 $\pi/2$。

移过 $t=\nu$ 点后，应有 $\nu<t<\infty$，由 (10.36) 式得

$$dz=\frac{\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a}{\text{sn}\,a}\cdot\frac{t dt}{-(t-\nu)(2\sqrt{t})(-i\sqrt{t-1})(-i\sqrt{k^2t-1})}$$

这里 dz 是正实数，故 z 点移动方向与 BT 段相反，二段线相互平行。

当 t 很大时，(10.36) 式积分近似为

$$H\int t^{-3/2}dt=-H2t^{-1/2}$$

可见当 t 画出一个正向无限大半圆周时，z 画出一负向的无限小角度（仍在C点）。最后 t 由 $-\infty$ 到 0 时，z 完成如图 10.14 所示的图像。

下面分析 z 面上线段的大小。应用 (6.29A) 式，得

$$\Pi(u,\ a)-\Pi(a,\ u)=uz(a)-az(u) \tag{10.37}$$

此式中，令 $u=K$，考虑到 $\text{cn}K=0$，$\Pi(a,\ K)=0$；另外 $z(K)=0$，故得

$$\Pi(K,\ a)=Kz(a) \tag{10.38}$$

在 (10.37) 式中，令 $u=K+iK'$，因 $\text{dn}(K+iK')=0$，$z(K+iK')=-\pi i/(2K)$，得

$$\Pi(K+iK',\ a)=Kz(a)+i[K'z(a)+\pi a/(2K)] \tag{10.39}$$

同样得

$$\Pi(iK',\ a)=-i[\pi/2-K'z(a)-\pi a/(2K)] \tag{10.40}$$

参看图 10.14，在 z 面上，A 点，$u=K$；B 点，$u=K+iK'$，故 z 面上

$$\left.\begin{aligned} OA &= K\,z\,(a) \\ AB &= K'\,z\,(a,) + \frac{\pi a}{2K} \end{aligned}\right\} \tag{10.41}$$

从前面分析知

$$CO + AB = \frac{\pi}{2}$$

$$CO = \frac{\pi}{2} - AB = \frac{\pi}{2} - K'\,z\,(a) - \frac{\pi a}{2K} \tag{10.42}$$

这个结果也可由（10.40）式得出，因为C点坐标是$u = iK'$。

当给定a和k时，即可由（10.41）和（10.42）式得出各线段的长度。

最后研究当常数a由ia替代时的情形。由（10.35）和(10.36）式得

$$z = \Pi\,(u,\ ia) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn} ia\ \operatorname{cn} ia\ \operatorname{dn} ia\ \operatorname{sn}^2 u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 ia\ \operatorname{sn}^2 u} du$$

$$= \frac{i\,\operatorname{dn}(a,\ k')}{\operatorname{sn}(a,\ k')\operatorname{cn}(a,\ k')} \int_0^u \frac{\operatorname{sn}^2 u\,du}{\nu + \operatorname{sn}^2 u}$$

$$= \frac{i\,\operatorname{dn}(a,\ k')}{\operatorname{sn}(a,\ k')\operatorname{cn}(a,\ k')}$$

$$\int_0^t \frac{t\,dt}{(\nu + t)\sqrt{4t(1-t)(1-k^2 t)}} \tag{10.43}$$

$$t = \operatorname{sn}^2 u, \qquad \nu = \frac{\operatorname{cn}^2(a,\ k')}{k^2 \operatorname{sn}^2(a,\ k')}$$

设$0 < a < K'$，则u，t，z面的映像如图 10.15 所示。应

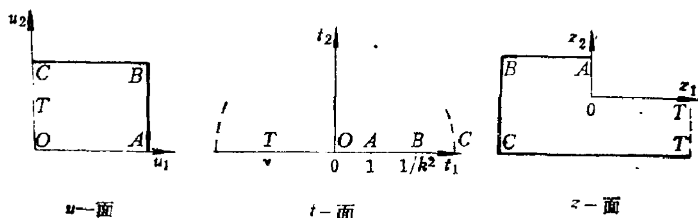


图10.15　虚常数时第三种椭圆积分的映射

用与上面相似的分析方法知，在 $t=-\nu$ 点,(10.43)式被积函数的留数是$-1/2$，故 z 面上在 $z=\infty$处应"跳跃"的距离是$\pi/2$。在A，B，C点的 z 值分别是

$$
\left.\begin{aligned}
&\Pi(K,\ ia)=Kz(ia)\\
&\Pi(K+iK',\ ia)=Kz(ia)+i\left[K'z(ia)+i\frac{\pi a}{2K}\right]\\
&\Pi(iK',\ ia)=-i\frac{1}{2}\pi+i\left[K'z(ia)+i\frac{\pi a}{2K}\right]
\end{aligned}\right\}
\tag{10.44}
$$

式中

$$
z(ia,\ k)=-i\left[z(a)+\frac{\pi a}{2KK'}-\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{dn}a}{\operatorname{cn}a}\right],\ (\text{模是 } k')
\tag{10.45}
$$

是个纯虚数。从这些公式可以求得线段 OA，AB，BC 的长度。

§10.6 超椭圆积分的映射

考察如下椭圆积分

$$
z=\int_0^t\frac{dt}{2t^{3/4}[(1-t)(1-k^2t)]^{1/2}}
\tag{10.46 A}
$$

$$
=\int_0^u\frac{du}{[u(1-u^2)(1-k^2u^2)]^{1/2}}\quad(t=u^2)
\tag{10.46B}
$$

$$
=\int_0^\eta\frac{d\eta}{(\operatorname{sn}\eta)^{1/2}}\quad(u=\operatorname{sn}\eta)
\tag{10.46C}
$$

其中（B）式正是在§6.7中研究过的超椭圆积分（6.108），它可以变换为二个基本椭圆积分之和，或表示为下式

$$
\left.\begin{aligned}
&z=\frac{1}{C}(w+w')\\
&w=\operatorname{sn}^{-1}(\zeta,\ b)\qquad w'=\operatorname{sn}^{-1}(\zeta,\ b')\\
&c=\sqrt{2(1+k)}\qquad \zeta^2=\frac{2(1+k)u}{(1+u)(1+ku)}
\end{aligned}\right|
\tag{10.47}
$$

$$b=\frac{1+\sqrt{k}}{C} \qquad b'=\frac{1-\sqrt{k}}{C}$$

$$b^2+b'^2=1 \qquad k=\left(\frac{b-b'}{b+b'}\right)^2$$

这里引用了z，t，u，η，ζ，w，w'共七个复变量。它们间的关系如（10.46）和（10.47）式所示。

根据（10.46）式，在z，t，u，η面上的映像如图10.16所示。z面上的梯形$OABC$实际上是二个同心正方形边界间的1/8区域，其周界四边形具有内角$\frac{1}{4}\pi$，$\frac{1}{2}\pi$，$\frac{1}{2}\pi$，$\frac{3}{4}\pi$。首先将该四边形内域映射为t的上半平面，再映射为u面的第一象限，最后映射为η面上的矩形域。

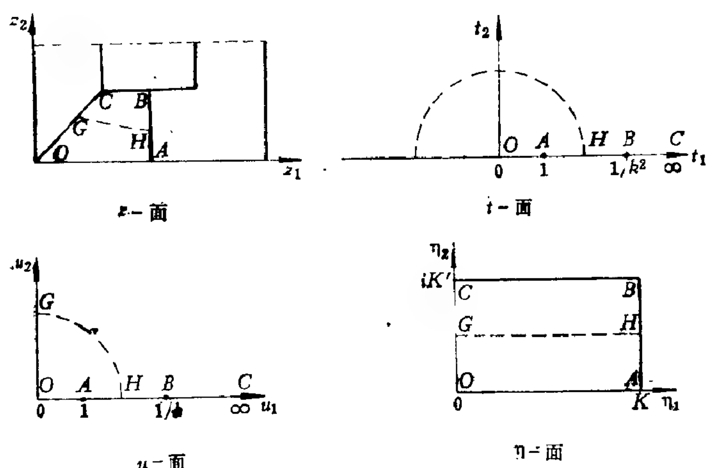


图10.16 超椭圆积分在z，t，u，η面的映像

为了求得z面上线段与η面线段间关系，需借助于中间变换（10.47）式。先考察ζ面的映像。

由（10.47）中ζ^2—u的关系式，很易看出，当$u=1$，$1/k$时，$\zeta^2=1$；当$u=0$，∞时，$\zeta^2=0$。当$u=1/\sqrt{k}$时，得$1-b^2\zeta^2=0$，取$\zeta=+1/b$，并令

$$\zeta - \frac{1}{b} = h, \quad u - \frac{1}{\sqrt{k}} = \varepsilon$$

则近似地得到

$$h = A\varepsilon^2, \quad A = -\frac{1}{2}(2 + 2k)^{1/2}k^{3/2}(1 + \sqrt{k})^3$$

可见 $u = 1/\sqrt{k}$ 与 $\zeta = 1/b$ 点相对应，并且当 u 沿以 $u = 1/\sqrt{k}$ 点为心的小圆移动半周时，则 ζ 按相同的方向绕以 $\zeta = 1/b$ 点为心的小圆移动一周。

至于 u 面虚轴 $OC(u_1 = 0)$ 在 ζ 面的映像，可由以下分析看出。令 $\zeta' = \zeta^2$，得

$$\zeta' = \frac{2(1 + k)u}{(1 + u)(1 + ku)}$$

将 $u = u_1 + iu_2 = iu_2$ 代入得

$$\zeta' = \frac{2(1 + k)^2u_2^2 + i2(1 + k)u_2(1 - ku_2^2)}{(1 - ku_2^2)^2 + (1 + k)^2u_2^2}$$

由此可以看出

$$|\zeta' - 1| = 1$$

即 u 面虚轴 OC 在 ζ' 面的映像是半径为 1 的圆周，圆心是 $\zeta' = 1$（未画出 ζ' 面）。该圆周经变换 $\zeta' = \zeta^2$，在 ζ 面的映像是半个双纽线（lemniscate），如图 10.17 所示。

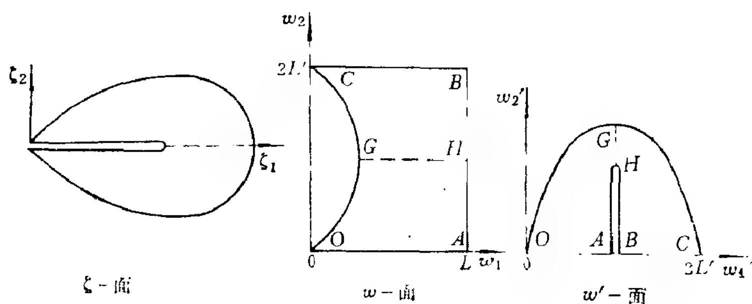


图10.17 ζ，w 和 w' 面映像

w和w'面上的映像可以由$w=\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, b)$，$w'=\mathrm{sn}^{-1}(\zeta, b')$得出如图10.17所示，图中$L$和$L'$表示模数为$b$和$b'$的第一种全椭圆积分。

现在可以求得各参量间的关系。在z面上令$a=OA$，$b=CB$，得$AB=a-b$。在B点有

$$z=a+i(a-b),\quad w=L+i2L',\quad w'=L'$$

由（10.47）式的第一式得

$$c(a+ia-ib)=L+i2L'+L' \tag{10.48}$$

因此有

$$ca=L+L' \qquad cb=L-L'$$

$$\frac{a}{b}=\frac{L+L'}{L-L'} \qquad \frac{L}{L'}=\frac{a+b}{a-b} \tag{10.49}$$

如果a/b是给定的，则立即得L/L'，从而可以求得b（例如利用椭圆积分表）。进一步可由（10.47）式求得k，由此得到η面上四边形之比K/K'。

可以利用本节的结果，得到如z面所示关于内外导体间的静态电容。

§10.7 双连通多角形域的保角映射

前面研究了单连通多角形域的保角映射。应用许瓦兹-克力斯托弗尔变换可以将一个面上的单连通多角形域映射成另一个上半平面，据此可以解决一批实际问题。将任意一双连通域映射为另一任意双连通域是个难于实现的问题。但有可能实现比较简单的双连通域的映射。本节将要研究的是将边界是多角形的双连通域映射为另一个面上的圆环域，它实际上是更加普遍的许瓦兹一克力斯托弗尔公式的特殊情况，是借助于实施单连通多角形域在圆内的保角映射。下面将首先建立将双连通多角形域映射为圆环域的变换公式。

我们研究的双连通多角形域系由二个多角形A_0和A_1而形成的，A_1位于A_0之内部。有二种情形：一种是A_0和A_1之间

的多角形环状域；另一种是除去这个多角形环状域而留下的平面域，无限远点是该域的内点。我们先研究后一种双连通域S，如图 10.18 所示，z 面的无限远点是S的内点。设多角形A_0及A_1的顶点的内角为$\pi\alpha_1$，$\pi\alpha_2$，…，$\pi\alpha_n$。设z面双连通域S在w面的映像为圆环域G，G的周界是圆C_0和C_1，其半径分别是 1 和q（q是小于 1 的待定的未知正数），z面多角形各顶点在圆周C_0及C_1上的像分别用a_1，a_2，…，a_n表示。

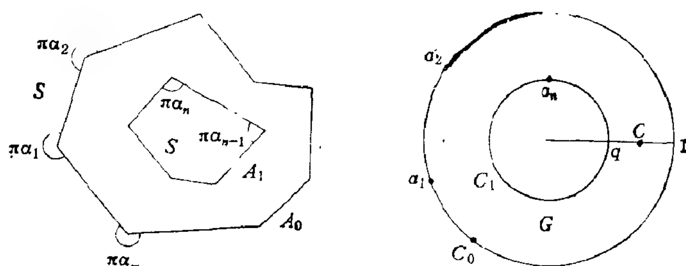


图10.18 任意双连通多角形域的映射

假定S域上的无限远点映射为w面G域上的c点，c位于实轴上，满足$q<c<1$。这表明所求的函数$z=z(w)$在$w=c$点具有一阶极点，而在G的其余点函数为正则的，并一直到周界是连续的。应用对称性原理，可将函数$z(w)$由圆环域G通过C_0解析开拓到圆环G_{-1}上，G_{-1}的周界是圆C_0及C_{-1}，C_{-1}与C_1上点对C_0是对称的，C_{-1}满足

$$|w|=\frac{1}{q}$$

可将C_{-1}称作是C_1关于C_0的镜像。在圆环G_{-1}内，函数$z=z(w)$具有一阶极点$w=1/c$。w面上亦可通过C_1解析开拓，得到圆环G_1，以此类推解析开拓下去，可以得到圆环G_{-1}，G_1，G_{-2}，G_2，…。容易看出z平面上连续偶数次的镜像z_1，等效于z平面上某一个放大，平移及旋转，即有

$$z_1=az+b$$

a和b是常数。而在w面上相应的映像为

$$w_1 = q^{2k} w$$

因此待求的函数 $z = z(w)$ 应满足如下关系式

$$z(q^{2k} w) = az(w) + b$$

对上式求导得

$$\frac{d}{dw} z(q^{2k} w) = a \frac{d}{dw} z(w)$$

及

$$\frac{\frac{d^2}{dw^2} z(q^{2k} w)}{\frac{d}{dw} z(q^{2k} w)} = \frac{\frac{d^2}{dw^2} z(w)}{\frac{d}{dw} z(w)}$$

由此得

$$q^{2k} \frac{z''(q^{2k} w)}{z'(q^{2k} w)} = \frac{z''(w)}{z'(w)}$$

可以看到下列函数

$$\Phi(w) = w \frac{z''(w)}{z'(w)}$$

满足关系式

$$\Phi(q^{2k} w) = \Phi(w) \quad (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \cdots)$$

当 $k = 1$ 时得

$$\Phi(q^2 w) = \Phi(w) \tag{10.50}$$

为了构造出一个双周期函数，令

$$q = e^{\pi i \frac{\omega'}{\omega}}$$

式中 ω 为任意正实数，ω' 是满足上式的纯虚数。并令

$$\Phi(w) = \varphi\left(\frac{\omega}{\pi i} \ln w\right) = \varphi(u)$$

由（10.50）式可以看出 $\varphi(u)$ 满足

$$\varphi(u + 2\omega') = \varphi(u) \tag{10.51A}$$

另一方面取圆环 $G_k (G_0 = G)$ 中的一个，当沿包含点 $w = 0$ 的闭域界绕一周时，$\Phi(w)$ 不改变。由于对这一旋转使 w 的角度增大了 2π，使得

$$u=\frac{\omega}{\pi i}\ln w$$

增加了 2ω，可见存在下关系式

$$\varphi(u+2\omega)=\varphi(u) \tag{10.51B}$$

由此可见 $\varphi(u)$ 是我们欲求的以（2ω，$2\omega'$）作周期的双周期函数。不过函数的具体形式尚未求得。为了作出这一函数，需研究该函数在某一单位胞腔中的极点，这又归结为研究函数 $\Phi(w)$ 在某圆环内的极点。取周界是圆周 C_{-1}，C_1 的圆环作为研究对象。为了使得函数 $\Phi(w)$ 在环域周界上是正则的，最好取由圆周

$$|w|=\varepsilon q^{-1},\quad |w|=\varepsilon q$$

为周界的环域 Q，这里 ε 小于 1 但接近 1。在该环域的周界上函数是正则的，在其内部函数 $\Phi(w)$ 的极点为

$$w=a_k,\quad c,\quad \frac{1}{c}\qquad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

在这些点可将函数展成下列幂级数

$$z=A+(w-a_k)^{\alpha_k}P(w-a_k)$$

$$z=\frac{A_1}{w-c}+P(w-c)\qquad (A_1\neq 0)$$

$$z=\frac{A_2}{cw-1}+P(w-c)\qquad (A_2\neq 0)$$

式中 A_1，A_2，A 是常数，P 表示幂级数。函数 $\Phi(w)$ 相应的展开式为

$$\Phi(w)=\frac{a_k(\alpha_k-1)}{w-a_k}+\cdots$$

$$\Phi(w)=-\frac{2c}{w-c}+\cdots$$

$$\Phi(w)=-\frac{2}{cw-1}+\cdots$$

应用这些公式，对于被研究的点，可求得

$$\left.\begin{aligned}\varphi(u)&=\frac{\omega}{\pi i}\frac{\alpha_k-1}{u-\frac{\omega}{\pi i}\ln a_k}+\cdots\\ \varphi(u)&=-\frac{\omega}{\pi i}\frac{2}{u-\frac{\omega}{\pi i}\ln c}+\cdots\\ \varphi(u)&=-\frac{\omega}{\pi i}\frac{2}{u+\frac{\omega}{\pi i}\ln c}+\cdots\end{aligned}\right\}\qquad(10.51C)$$

函数$\varphi(u)$只具有一阶极点，留数之和等于零，因为由矩形外角之和的定理有

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)=4$$

可见$\varphi(u)$是个椭圆函数。根据§4.5的分析，这个椭圆函数可以用ζ函数表示如下

$$\begin{aligned}\varphi(u)=&\frac{\omega}{\pi i}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\zeta\left(u-\frac{\omega}{\pi i}\ln a_k\right)\\ &-\frac{2\omega}{\pi i}\zeta\left(u-\frac{\omega}{\pi i}\ln c\right)\\ &-\frac{2\omega}{\pi i}\zeta\left(u+\frac{\omega}{\pi i}\ln c\right)+A\end{aligned}$$

式中A是常数。运用（3.109）式，再对上式积分，取掉对数后得

$$z'(w)=Bw^{\sigma}\frac{\prod_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)}\qquad(10.52)$$

式中B和σ为二个常数。

为了确定常数σ，令点w绕包含有$w=0$点且沿某一圆环的闭合路径旋转一周，（10.52）式的左方不变，但右方出现因子

$$e^{2\pi i\sigma}e^{\pi i\left[\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)-4\right]}=e^{2\pi i\sigma}$$

因此 σ 一定是整数。如使 z 面上域 S 连续变形，则 q 以及函数 $z(w)$ 都连续变化，随之 σ 连续变化。但因 σ 是整数，故 σ 必须保持不变。为求 σ，使 S 按下述方式变形取极限，即令内部多角形不改变形状但逐渐减小，缩小到一点，这样就得到将 z 面多角形 A_0 的外部域映射为 w 面上圆的内域。如此取极限，显然 $q=0$。若多角形 A_0 共有 m 个顶点（多角形 A_1 有 $(n-m)$ 个顶点），对于这种极限域，其变换函数为

$$z_0'(w)=B_0\prod_{k=1}^{m}(w-a_k)^{\alpha_k-1}\frac{1}{(w-c)^2\left(w-\frac{1}{c}\right)^2}$$

(10.52A)

另一方面，取极限时（10.52）式变为

$$B_0w^{\sigma}\prod_{k=1}^{m}(w-a_k)^{\alpha_k-1}w^{\sum_{j=m+1}^{n}(\alpha_j-1)}\frac{1}{(w-c)^2\left(w-\frac{1}{c}\right)^2}$$

(10.52B)

式中参数 σ，α_k，c 可以取与（10.52）式不同的值。但（10.52A）及（10.52B）式中的参数 c 可以认为是相同的。又因为

$$\sum_{j=m+1}^{n}(\alpha_j-1)=2$$

将（10.52A）与（10.52B）式比较，得 $\sigma=-2$。代入（10.52）式，二边积分得

$$c_1z+c_2=\int\frac{\prod_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}}{\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\right)\vartheta_1^2\left(\frac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\right)}\frac{dw}{w^2}\quad(10.53)$$

应当指出，待定的参数间存在一关系式，为了得到它，将点 w 绕点 $w=c$ 旋转一周，此时 z 不改变。再求出（10.53）式被积函数在点 c 的留数，且令其为 0，则得到参数间的关系式

$$\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-1)\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{\ln c-\ln a_k}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln c-\ln a_k}{2\pi i}\right)}-2\frac{\vartheta_1'\left(\dfrac{\ln c}{\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln c}{\pi i}\right)}=2\pi i \tag{10.54}$$

以上分析是针对图 10.18 那样包含有无限远点的双连通域进行的。对于 z 面上由二个多角形围成的有限域，可以按类似的过程处理。和上面一样，令 $\alpha_k\pi$ 表示域的内角，则得到变换函数为

$$c_1z+c_2=\int\prod_{k=1}^{n}\left[\vartheta_1\left(\frac{\ln w-\ln a_k}{2\pi i}\right)\right]^{\alpha_k-1}\frac{dw}{w^2} \tag{10.55}$$

§10.8 双连通多角形域保角映射举例

（1）将 z 平面二个同心正 n 角形所围的域映射为 w 平面的圆环域，设 z 平面二个多角形的顶点分别位于过中心的同一射线上

如图 10.19 所示，w 面上圆环域周界的半径为 1 及 q（$0<q<1$），z 面多角形为正 n 角形，其顶点 A_l 及 B_l 在 w 面圆环域周界上映像分别是 a_l 及 b_l，令 A_1 的像 $a_1=1$，按对称原则有

$$a_l=e^{\frac{2(l-1)\pi i}{n}},\quad b_l=qa_l\quad l=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

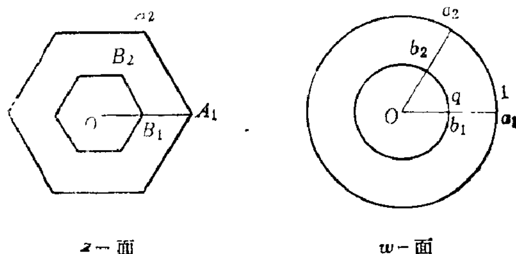


图10.19　正 n 角同心域的映像

令 τ 为纯虚数，使满足

$$q = e^{\pi i \tau}$$

z 面上多角形内角分别为

$$A_l: \quad \pi\alpha_l = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$$

$$B_l: \quad \pi\beta_l = \left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

根据（10.55）式，这个正多角形域到圆环域的变换式为

$$z - 1 = C_1 \int_1^w \prod_{l=1}^{n} \left[\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln q a_l}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln a_l}{2\pi i}\right)} \right]^{2/n} \frac{du}{u^2} \quad (10.56)$$

式中 $\vartheta_1(\upsilon) = \vartheta_1(\upsilon/\tau)$，利用关系式 $\vartheta_1\left(\upsilon - \dfrac{\tau}{2}\right) = -iq^{-1/4} e^{\pi i \upsilon} \vartheta_4(\upsilon)$，得

$$\vartheta_1\left(\frac{\ln u - \ln q a_l}{2\pi i}\right) = \vartheta_1\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_l} - \frac{\tau}{2}\right)$$

$$= -iq^{-1/4} e^{\pi i \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_l}} \vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_l}\right)$$

$$= -iq^{-1/4}\left(\frac{u}{a_l}\right)^{1/2} \vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_l}\right)$$

$$= C_q u^{1/2} \vartheta_4\left(\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{u}{a_l}\right)$$

式中 C_q 为常数

再应用（3.119）式

$$\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln q a_l}{2\pi i}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln u - \ln a_l}{2\pi i}\right)} = C_q u^{1/2} \frac{\vartheta_4\left(\dfrac{1}{2\pi i}\ln\dfrac{u}{a_l}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{1}{2\upsilon i}\ln\dfrac{u}{a_l}\right)}$$

$$= C_q \frac{u^{1/2}}{\operatorname{sn}\left(\dfrac{K}{\pi i}\ln\dfrac{u}{a_l},\ \ k\right)}$$

将上式代入（10.56）式得

$$z-1=C_2\int_1^w \frac{du}{u\sqrt[n]{\prod_{l=1}^{n}\mathrm{sn}^2\left(\frac{K}{\pi i}\ln\frac{u}{a_l},\ k\right)}}$$

或

$$z-1=C_3\int_1^w \frac{du}{u\sqrt[n]{\prod_{l=-n}^{n-1}\mathrm{sn}\left(\frac{K}{\pi i}\ln u-\frac{2lK}{n},\ \ k\right)}}$$

(10.56A)

应用关系式

$$\mathrm{sn}(v+\alpha)\mathrm{sn}(v-\alpha)=\frac{\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2\alpha}{1-k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 v}$$

令（10.56A）式中被积函数根号内的因子为F，则有

$$F=\prod_{l=-n}^{n-1}\mathrm{sn}\left(v-\frac{2lK}{n}\right)$$

$$=-\mathrm{sn}^2 v\prod_{l=1}^{n-1}\frac{\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2\frac{2lK}{n}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{2lK}{n}\mathrm{sn}^2 v}$$

因为

$$\mathrm{sn}^2\frac{2\alpha K}{n}=\mathrm{sn}^2\frac{2(n-\alpha)K}{n}$$

故当n为奇数时得

$$F=-\mathrm{sn}^2 v\prod_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}\left\{\frac{\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2\frac{2lK}{n}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{2lK}{n}\ \mathrm{sn}^2 v}\right\}^2 \qquad (10.56\mathrm{B})$$

n为偶数时得

$$F=\frac{\mathrm{sn}^2 v\,\mathrm{cn}^2 v}{\mathrm{dn}^2 v}\prod_{l=1}^{\frac{n}{2}-1}\left\{\frac{\mathrm{sn}^2 v-\mathrm{sn}^2\frac{2lK}{n}}{1-k^2\mathrm{sn}^2\frac{2lK}{n}\mathrm{sn}^2 v}\right\}^2 \tag{10.56C}$$

由 (7.87)～(7.88) 式得

$$F=C_r\mathrm{sn}^2\left(\frac{v}{M},\ \lambda\right),\quad L=\frac{K}{nM},\qquad L'=\frac{K'}{M} \tag{10.57}$$

$$\lambda=k^n\prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\mathrm{sn}^4\left(\frac{2l-1}{n}K,\ k\right) \tag{10.57A}$$

$$M=\prod_{l=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2l-1}{n}K,\ k\right)}{\mathrm{sn}^2\left(\frac{2l}{n}K,\ k\right)} \tag{10.57B}$$

式中 C_r 为常数，将 (10.57) 式代入 (10.56A) 式得变换函数为

$$z-1=C\int_1^w\frac{du}{u\sqrt[n]{\mathrm{sn}^2\left(\frac{K\ln u}{M\pi i},\ \lambda\right)}} \tag{10.58}$$

式中 C 为常数，λ，M为 (10.57A) 和 (10.57B) 式。

下面分析一个特殊情形。即将 z 面上内接于单位圆的正 n 角形域映射为 w 面的单位圆域，并设 $z=0$ 和 $z=1$ 的点在 w 面上的像分别是 $w=0$ 和 $w=1$，对此不难得出变换函数是

$$z-1=C_1\int_1^w\frac{du}{\sqrt[n]{(u^n-1)^2}} \tag{10.59}$$

因为
$$u^{n/2}-u^{-n/2}=2i\sin\frac{n\ln u}{2i}$$

故 (10.59) 式可以写为

$$z-1=C\int_1^w\frac{du}{u\sqrt[n]{\sin^2\frac{n\ln u}{2i}}} \tag{10.60}$$

将（10.58）与（10.60）式进行比较，可以看到有趣的结果，即 sn 与 sin 处于相似的位置。

（2）将 z 平面沿实轴两处切断的平面映射为 w 面上的圆环。设 z 面实轴上被切断的线段为$[-1, \alpha]$，$[\beta, 1]$（$-1<\alpha<\beta<1$）。

为了实现这个映射，我们可以分二个步骤。

第一步将实轴二处被切断的 z 平面映射为 u 面上的矩形域，其各顶点坐标如图 10.20 所示。$u-z$ 面的变换函数为

$$z=\frac{\mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{cn}^2\rho+\mathrm{cn}^2 u\,\mathrm{sn}^2\rho}{\mathrm{sn}^2 u-\mathrm{sn}^2\rho} \tag{10.61A}$$

或

$$z-\alpha=\frac{1-\alpha^2}{2\mathrm{sn}^2 u+\alpha-1} \tag{10.61B}$$

雅各比椭圆函数的模

$$k^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{(1-\alpha)(1+\beta)} \tag{10.61C}$$

而 ρ 与 α 和 β 的关系为

$$\left.\begin{aligned} &1-2\mathrm{sn}^2\rho=\alpha\\ &2\frac{\mathrm{cn}^2\rho}{\mathrm{dn}^2\rho}-1=\beta \end{aligned}\right\} \tag{10.62}$$

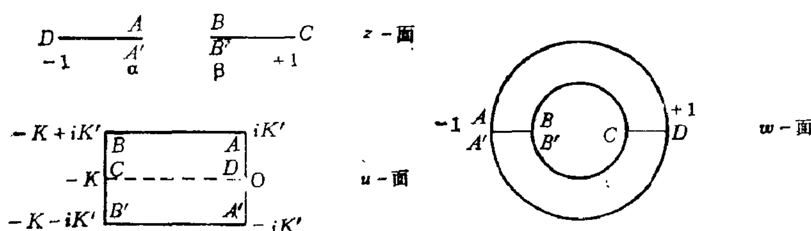


图10.20　$z-w$ 面的映射

如图 10.20 所示，u 面实轴将矩形分为二个相同的矩形，二者对实轴对称。不难看出，ρ 位于 ρ 的实轴上，当 $u=\rho$ 时，$z=\pm\infty$。当 u 从 ρ 点出发，按正方向绕上方矩形周界一周时，点 z 沿实轴由 $-\infty$ 到 $+\infty$。可见 u 面的上方矩形映射为 z 的上半平面，

而矩形的下底（$-K\leqslant u\leqslant 0$）对应 z 平面上实轴去掉区间〔-1，1〕所剩下的部分。同理 u 面的下半矩形映射为 z 的下半平面。总之，变换函数（10.61）式将 u 面上矩形映射为沿区间〔-1，1〕作切断后的整个 z 平面。

第二步将 u 平面矩形映射为 w 平面的圆环。取

$$u=\frac{K'}{\pi}\ln w \tag{10.63}$$

二个面上映像的对应关系是 $u=0$，$w=1$。w 面上圆环的周界圆周为

$$|w|=1,\quad |w|=e^{-\pi\frac{K}{K'}}$$

即 u 面上由 $u=-iK'(A')$ 点出发，按正向沿矩形一周时，w 面上从 $w=-1(A')$ 点出发沿外圆周行进再到 $w=-1(A)$ 点时，沿 AB 进入内圆后沿内圆的正向绕一周，再沿 $B'A'$ 返回到 $w=-1$ 点。

由此可见，公式

$$z=\alpha+\frac{1-\alpha^2}{2\mathrm{sn}^2\dfrac{K'\ln w}{\pi}+\alpha-1} \tag{10.64}$$

将 z 面沿实轴上区间〔-1，α〕和〔β，1〕切断了的平面映射为 w 平面上的圆环域，z 面实轴上切缝 ADA' 和 BCB' 分别映射为 w 面上同心的外圆和内圆。其余满足 $\alpha\leqslant z\leqslant\beta$ 及 $z<-1$，$z>+1$ 的实轴部分被映射为 w 面上“沟通”内外圆的径向线段 AB 和 CD。

第十一章　椭圆函数的各种应用

本章介绍椭圆函数的其他几种应用。包括：用椭圆函数表示高次曲线的坐标，椭球坐标，特殊微分方程及拉普拉斯方程的解等，还包括在最佳极值问题中椭圆函数的应用。

§11.1　曲线的坐标用椭圆函数表示

本节研究 n ($\geqslant 3$)次平面曲线坐标用椭圆函值 $\wp u$ 表示的问题，这种表示法是以函数 $\wp$ 所满足的微分方程式为基础的。

(1) 三次曲线

先研究一特殊的平面三次曲线，其坐标 x、y 满足下列关系式

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3 \tag{11.1}$$

当判别式 $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ 时，则三次曲线没有重点。令

$$x = \wp(u) \quad y = \wp'(u) \tag{11.2}$$

即得著名的椭圆函数 $\wp$ 的微分方程式。换句话说可以通过函数 $\wp$ 将(x, y)值与 u 对应起来，而且这种关系是一对一的。对于任一组(x, y)值，可以证明在周期平行四边形（单位胞腔）内只能有一个 u 值。由于 $x = \wp(n)$ 只有二个根：u_1 和 $-u_1$；而因 $\wp'(u)$ 是奇函数，相应于这二个 u 的 y 值不同，故对一组(x, y)，只能有一个 u 值。反过来，由于 $\wp(u)$，$\wp'(u)$ 是单值函数，对于一个 u，只能有一组(x, y)值。

现在研究一般平面三次曲线。这类曲线一般有九个拐点，取其一为坐标原点，并以此点之切线为 x 轴，则此曲线方程为

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + 2y(\alpha x + \beta y) + y = 0 \tag{11.3}$$

设法将该式变换为 (11.1) 式的形式，为此引入新变量 ξ，η，

令

$$x=\frac{\xi}{\eta}\qquad y=\frac{1}{\eta}\tag{11.4}$$

则(11.3)式化为

$$(\eta+\alpha\xi+\beta)^2=-A\xi^3+(\alpha^2-B)\xi^2+(2\alpha\beta-C)\xi+\beta^2-D$$

再令

$$\xi=C_1z+C_2\tag{11.5}$$

代入上式，选择常数 C_1，使等号右端 z^3 的系数为 4，z^2 的 系数为 0，得

$$[\eta+\alpha(C_1z+C_2)+\beta]^2=4z^3-g_2z-g_3\tag{11.6}$$

该式右方与(11.1)式相同，令

$$z=\mathscr{P}(u;\ g_2,\ g_3)$$

则由(11.6)式得

$$\eta+\alpha(C_1z+C_2)+\beta=\mathscr{P}'(u)$$

或

$$\eta=\mathscr{P}'(u)+\lambda\mathscr{P}(u)+\mu\tag{11.7}$$

式中 λ 与 μ 为常数。利用(11.4)，(11.5)和(11.7)式则得

$$\left.\begin{aligned}y&=\frac{1}{\eta}=\frac{1}{\mathscr{P}'(u)+\lambda\mathscr{P}(u)+\mu}\\x&=y\xi=y(C_1z+C_2)=\frac{C_1\mathscr{P}(u)+C_2}{\mathscr{P}'(u)+\lambda\mathscr{P}(n)+\mu}\end{aligned}\right\}\tag{11.8}$$

至此，已将 x，y 表示为参数 u 的椭圆函数。可将(11.8)式看成下式的特例

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{\alpha\mathscr{P}'(u)+\beta\mathscr{P}(u)+\nu}{a\mathscr{P}'(u)+b\mathscr{P}(u)+c}\\y&=\frac{\alpha_1\mathscr{P}'(u)+\beta_1\mathscr{P}(u)+\nu_1}{a\mathscr{P}'(u)+b\mathscr{P}(u)+c}\end{aligned}\right\}\tag{11.9}$$

式中 a，b，c，α，β，ν 等均是常数。

为了说明（10.9）式为三次平面曲线，试取任一直线 $Ax+By+c=0$。该直线与上曲线之交点的 u 值满足下式

$$A[\alpha\mathscr{P}'(u)+\beta\mathscr{P}(u)+\nu]+B[\alpha_1\mathscr{P}'(u)+\beta_1\mathscr{P}(u)+\nu_1]+C[a\mathscr{P}'(u)+b\mathscr{P}(u)+c]=0$$

此等式的左方为一三阶椭圆函数，在周期四边形内它仅有一三阶极点 $u=0$，另有三个零点 u_1，u_2，u_3。可见曲线（11.9）式与任一直线的交点有三个，又该曲线是代数曲线，故它是三次平面曲线。在函数 $\mathscr{P}$ 的周期平行四边形中，某一 u 值决定一组（x，y）值，其对应关系是唯一的。

（2）四次曲线

任意平面四次曲线方程可表示如下

$$\begin{aligned} z^2=P(t)&=a_0t^4+4a_1t^3+6a_2t^2+4a_3t+a_4 \\ &=[\varphi_2(t)]^2-\varphi_1(t)\varphi_3(t) \end{aligned} \tag{11.10}$$

式中 $\varphi_k(t)$ 是 t 的 k 次多项式。显然满足上式的 $\varphi_k(t)$（$k=1$，2，3）有无限多种形式的组合。下面介绍一种有效的选择方法。

设 $t=\alpha$，$z=\beta$ 是曲线（11.10）式上一点，显然有 $\beta=\sqrt{P(\alpha)}$。今选 $\varphi_2(t)$（有无限多种可能），使得 $\beta=\varphi_2(\alpha)$；这意味着 $t=\alpha$ 应是方程 $P(t)-[\varphi_2(t)]^2=0$ 的根。因此可令 $\varphi_1(t)=t-\alpha$，从而可确定出 $\varphi_3(t)$。利用选定的 $\varphi_k(t)$，能构造一个辅助的平面三次曲线，其方程如下

$$x^2\varphi_3\left(\frac{y}{x}\right)+2x^2\varphi_2\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi_1\left(\frac{y}{x}\right)=0 \tag{11.11}$$

该曲线与直线 $y=tx$ 的交点共有三个点，其中一个是原点，另外二点的 x 值满足下列二次方程式

$$x^2\varphi_3(t)+2x\varphi_2(t)+\varphi_1(t)=0 \tag{11.12}$$

考虑到（11.10）式，此式关于 x 的解是

$$x=\frac{-\varphi_2(t)+\sqrt{P(t)}}{\varphi_3(t)} \tag{11.13}$$

应用前一段所得的结果，三次曲线（11.11）式的坐标（x、y）可以用椭圆函数 $\mathscr{P}$ 表示，然后通过（11.13）式和 $y=tx$，即可将四次曲线（11.10）式的坐标（t，z）用函数 $\mathscr{P}$ 表示。

下面进行具体演算。不失一般性，设(11.10)式中$a_1=0$(若不为0，可作变换$x=t-a_1/a_0$，使x^3的项消失)，得

$$az^2=a_0P(t)=(a_0t^2)^2+6a_0a_2t^2+4a_0a_3t+a_0a_4 \tag{11.14}$$

满足(11.10)式的$\varphi_k(t)$可选择如下

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(t)&=-1\\ \varphi_2(t)&=a_0t^2\\ \varphi_3(t)&=6a_0a_2t^2+4a_0a_3t+a_0a_4\end{aligned}\right\} \tag{11.15}$$

代入(11.11)式，得辅助三次曲线的方程式

$$6a_0a_2xy^2+4a_0a_3x^2y+a_0a_4x^3+2a_0y^2-x=0 \tag{11.16}$$

这是y的二次方程，其解

$$y=\frac{-2a_0a_3x^2+\sqrt{4a_0a_3^2x^4-x(a_0a_4x^2-1)(6a_0a_2x+2a_0)}}{6a_0a_2x+2a_0}$$

令$x=1/\xi$，得

$$y=\frac{-2a_0a_3+\sqrt{4a_0^2a_3^2-(a_0a_4-\xi^2)(6a_0a_2+2a_0\xi)}}{2a_0\xi(3a_2+\xi)}$$

再令$\xi=2a_0\eta-a_2$，则得

$$y=\frac{-a_3+\sqrt{a^2(4\eta^3-g_2\eta-g_3)}}{(2a_0\eta+a_2)(2a_0\eta-a_2)} \tag{11.17}$$

$$g_2=\frac{a_0a_4+3a_2^2}{a_0^2},\quad g_3=\frac{a_0a_2a_4-a_2^3-a_0a_3^2}{a_0^3}$$

今令$\eta=\mathscr{P}(u)$，则得

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{1}{\xi}=\frac{1}{2a_0\mathscr{P}(u)-a_2}\\ y&=\frac{a_0\mathscr{P}'(u)-a_3}{[2a_0\mathscr{P}(u)-a_2][2a_0\mathscr{P}(u)+2a_2]}\end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

另一方面将(11.14)式代入(11.12)式得

$$\frac{1}{x^2}-2a_0t^2\frac{1}{x}-(6a_0a_2t^2+4a_0a_3t+a_0a_4)=0$$

该式的解

$$\frac{1}{x}=a_0t^2+\sqrt{a_0P(t)}$$

由此可将 t 和 z 用三次曲线坐标 $(x,\ y)$ 表示如下

$$t=\frac{y}{x},\quad \sqrt{a}\ z=\sqrt{a_0 P(t)}=\frac{1}{x}-a_0\left(\frac{y}{x}\right)^2 \tag{11.19}$$

至此，已通过 (11.18)，(11.19) 式将任意平面四次曲线 (11.14) 式的坐标 $(t,\ z)$ 表示成 u 的椭圆函数。为将最后结果表示得更简单些，引入常数 v，使

$$\mathscr{P}(v)=-\frac{a_2}{a_0},\quad \mathscr{P}'(v)=\frac{a_3}{a_0} \tag{11.20}$$

很易验证(11.17)，(11.20)式满足基本关系式 (11.1)和(11.2)。将(11.18)和(11.20)式代入 (11.19)式得

$$t=\frac{1}{2}\ \frac{\mathscr{P}'(u)-\mathscr{P}'(v)}{\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)} \tag{11.21}$$

$$z=\sqrt{a_0}\left\{2\mathscr{P}(u)+\mathscr{P}(v)-\frac{1}{4}\left[\frac{\mathscr{P}'(u)-\mathscr{P}'(v)}{\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(v)}\right]^2\right\}$$

再应用 (5.9)式，得

$$z=\sqrt{P(t)}=\sqrt{a_0}\{\mathscr{P}(u)-\mathscr{P}(u+v)\} \tag{11.22}$$

（3）亏数为1的 n 次曲线

在讨论 n 次曲线 C_n 用椭圆函数表示之前，先介绍确定 C_n 所需的点数，C_n 的重点数以及什么叫亏数等问题。

n 次平面曲线 C_n 的方程可以表示如下

$$F(x,\ y)=\sum_{m=0}^{n} f_m(x,\ y)=0 \tag{11.23}$$

$f_m(x,\ y)$ 是 m 次齐次多项式，有 $m+1$ 个系数。因用任一常数乘上式而不改变 C_n，故独立的系数总数 M_n 为

$$M_n=\sum_{m=0}^{n}(m+1)-1=\sum_{m=1}^{n}(m+1)=\frac{1}{2}n(n+3) \tag{11.24}$$

M_n 值就是确定 C_n 所需的点数。

一个 C_n 曲线若可分解为若干相乘的因子(例如 $F(x,\ y)=F_1(x,\ y)F_2(x,\ y)\cdots=0$，即能分解为若干曲线 $F_1(x,$

$y)=0$，$F_2(x, y)=0, \cdots$）则称它是能分解的，否则称它是不能分解的。现在来求不能分解的曲线 C_n 的二重点数。设 C_n 有 k 个二重点。作曲线 C_{n-1}，经过这 k 个点，另外还经过 C_n 上指定的 $M_{n-1}-k$ 个点，M_{n-1} 为确定 C_{n-1} 所需要的点数。因为一个重点算作二个点，所以 C_n 与 C_{n-1} 的交点数目 $=2k+M_{n-1}-k=M_{n-1}+k$。但已知二曲线 C_n 和 C_m 的交点数最多是 nm 个，故应有

$$M_{n-1}+k\leqslant n(n-1)$$

或

$$k\leqslant n(n-1)-M_{n-1}=n(n-1)-\frac{1}{2}(n-1)(n+2)$$

$$k\leqslant\frac{1}{2}(n-1)(n-2) \tag{11.25}$$

即 C_n 最多只能有 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个二重点

今将最大可能的二重点数与实际的二重点数之差

$$p=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-k \tag{11.26}$$

称作亏数。亏数 $p=0$ 的曲线有最多的二重点，这种曲线是有理曲线，它的坐标可用一个参数的有理函数表示。亏数为 1 的 C_n，其二重点数 $k=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)-1=\frac{1}{2}n(n-3)$。当 $n=0$ 时，$k=0$，这表明：没有二重点的三次曲线，其亏数等于 1。

下面证明亏数为 1 的 n 次曲线的坐标可以用椭圆函数表示。

作一 $(n-2)$ 次曲线 C_{n-2}，根据(11.24)式知需给定的点数为 $M_{n-2}=\frac{1}{2}(n-2)(n+1)$ 个。这 M_{n-2} 个点，一部分选用 C_n 的全部二重点$\left(共\frac{1}{2}n(n-3)个\right)$，一部分选用 C_n 上的任意单值点（共 $n-3$ 个），还剩下待定的点数为 $M_{n-2}-\frac{1}{2}n(n-3)-n+3=2$，可以用二个未知系数 λ 和 μ 表示。因此 C_{n-2} 的方程具有如下形式

$$f_1(x, y)+\lambda f_2(x, y)+\mu f_3(x, y)=0 \tag{11.27}$$

曲线 C_n 与 C_{n-2} 的交点总数最多只能有 $n(n-2)$ 个。上面已指出了二部分支点，其中每一个二重点算二个交点，故已知的交点总数为 $n(n-3)+n-3=n(n-2)-3$。因此二曲线最多还可能交于三点。

应用(11.27)式中的 $f_i(x, y)$，可以引进新的变量

$$x'=\frac{f_1(x, y)}{f_3(x, y)} \qquad y'=\frac{f_2(x, y)}{f_3(x, y)} \tag{11.28}$$

由(11.28)与(11.23)式约去 x，y，即可得到 x'，y' 的方程，它代表一代数曲线 C'。换句话说，当变点 (x, y) 沿 C_n 移动时，所对应的 (x', y') 沿曲线 C' 移动。在进一步分析 C' 的性质和用途之前，须证明 C_n 上的点 (x, y) 与 C' 上的点 (x', y') 间有一对一的关系。

设 C' 的点 (x', y') 与 C_n 上两点 (a, b) 和 (a', b') 相对应，则由(11.28)式得

$$\frac{f_1(a', b')}{f_1(a, b)}=\frac{f_2(a', b')}{f_2(a, b)}=\frac{f_3(a', b')}{f_3(a, b)}$$

由(11.27)式看出，若使 (a, b) 是 C_{n-2} 上的点，则 (a', b') 亦是。设 (a, b) 和 (a', b') 不是上述确定 C_{n-2} 曲线族的那些点，而是与 λ，μ 有关的那二点。当 (a, b) 固定后，λ 和 μ 中只有一个（例如 μ）是可以任意变的。这时曲线族 C_{n-2} 简化为一个参数的曲线族。这个曲线族还应与曲线 C_n 相交于一个变点 (x, y)，该变点与可变量 μ 存在对应关系，二者指定其一，另一就被确定下来，故变点 (x, y) 必是参数 μ 的有理函数。另一方面，变点 (x, y) 可以在 C_n 上连续变动，这就等于说 C_n 的坐标可以表示成一个参数的有理函数，其亏数等于0，二重点数是 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$，这与前提相矛盾。实际上题设 C_n 上的二重点数是 $\frac{1}{2}n(n-3)$，亏数为1。故有二点 (a, b) 和 (a', b') 的假

设不能成立。因此C'上的一点(x', y')只与C_n上的一点(x, y)相对应。C_n的坐标可以用C'坐标(x', y')的有理函数表示

$$x=\varphi_1(x', y'), \quad y=\varphi_2(x', y') \qquad (11.29)$$

此式能从(11.28)式解出。我们将(11.28), (11.29)式同时成立的变换称作**双有理变换**。

现在来求曲线C'的次数n'。显然n'等于C'与某直线$ax'+by'+c=0$相交的点数。因为C_n上一点对应C'上一点，故n'也等于C_n与曲线$af_1(x, y)+bf_2(x, y)+cf_3(x, y)=0$相交的点数。该曲线属于$C_{n-2}$曲线族，与$C_n$的交点随$a$，$b$，$c$变化的最多有三点。因此$C'$是三次曲线。其坐标可以用椭圆函数表示。

总之，曲线C_n之一点的坐标(x, y)能表示成三次曲线C'的坐标(x', y')的有理函数式(11.29)，而三次曲线坐标(x', y')已知可以用椭圆函数$\wp$表示。因此亏数为1的n次曲线坐标可用椭圆函数表示。

§11.2 椭球坐标用椭圆函数表示

首先介绍椭球坐标的概念，建立直角坐标(x, y, z)与椭球坐标(λ, μ, ν)间的关系，然后研究用椭圆函数表示椭球坐标。

(1) 椭球坐标

在直角坐标系(x, y, z)中椭球的方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (11.30)$$

式中a，b，c分别为椭球三个主轴的二分之一。设$a>b>c$。

再考察下列二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1 \qquad (11.31)$$

该曲面与椭球共焦，其曲面的大小与形状取决于参数s。当$s=0$时，(11.31)式蜕变为椭球。当$s>-c^2$时，得到一系列共焦

椭球面。当$-b^2 < s < -c^2$时，得到一系列共焦单叶双曲面。当$-a^2 < s < -b^2$时，得到一系列共焦双叶双曲面(见图11.1)。对应于上述三个不同的s值，有三个曲面，它们在空间的交点有八个，对应唯一的一组(x^2, y^2, z^2)值，反之，空间任一点(x, y, z)经过该点有三个曲面(11.31)式，对应三个s值，我们将这三个s值分别表示为λ，μ，ν。可以看出λ，μ，ν是下列方程的三个根

$$F(s) \equiv \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) = 0 \quad (11.32)$$

当$s = \pm\infty$时，$F(s) = 1$；$s = -a^2, -b^2, -c^2$时，$F(s) = \infty$。取充分小的正数ε，下面给出s的不同区间及相应的$F(s)$值的变化范围

s：$(-a^2+\varepsilon, -b^2-\varepsilon)$，$(-b^2+\varepsilon, -c^2-\varepsilon)$，$(-c^2+\varepsilon, \infty)$

$F(s)$：$(-M_1, +M_2)$，$(-M_3, +M_4)$，$(-M_5, 1)$

$M_i (i = 1, 2, \cdots, 5)$为充分大的正数。因为在区间二端函数具有相反的号，故$F(s)$在每一区间均有根，这些根即是λ，μ，ν。选择$\lambda > \mu > \nu$，即$\lambda > -c^2 > \mu > -b^2 > \nu > -a^2$。这表明，在空间点$(x, y, z)$相交的三个曲面(11.31)式，其中$s = \lambda$对应椭球，$s = \mu$对应单叶双曲面，$s = \nu$对应双叶双曲面。

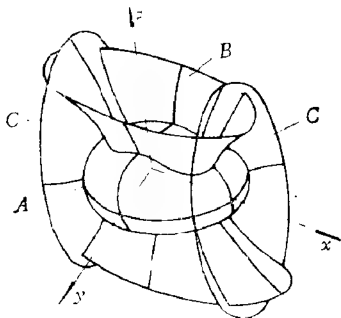


图11.1　三种曲面图

A—椭球面；*B*—单叶双曲面；*C*—双叶双曲面

可以将λ，μ，ν看成是点的坐标，这种坐标称为球椭坐标。因为λ，μ，ν是(11.32)式的三个根，故有

$$1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}=\frac{(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)}{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$$

或

$$\begin{aligned}&(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)-x^2(b^2+s)\\&\cdot(c^2+s)-y^2(c^2+s)(a^2+s)-z^2(a^2+s)\\&(b^2+s)=(s-\lambda)(s-\mu)(s-\nu)\end{aligned}$$

依次令 $s=-a^2,\ -b^2,\ -c^2$，得

$$\left.\begin{aligned}x^2&=\frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\\y^2&=\frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\\z^2&=\frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}\end{aligned}\right\}\qquad(11.33)$$

(11.33) 式建立了直角坐标（x，y，z）与椭球坐标(λ，μ，ν）之间的关系，但这种关系不是单值的，后面将看到，应用椭圆函数可以把对应关系变为单值的。在做这一分析之前，须对椭球坐标作进一步的分析。

先来证明经过任一点（x，y，z）的三个曲面是互相正交的，即λ，μ，ν是正交曲面坐标。通过（x，y，z）点的任一曲面 $F(x,\ y,\ z)=0$ 的法向 (L,M,N) 与$\left(\frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\ \frac{\partial F}{\partial z}\right)$成正比。故上述三个曲面的法向（$L_i$，$M_i$，$N_i$，$i=\lambda$，$\mu$，$\nu$）的比例式为

$$\left.\begin{aligned}(s=\lambda)\quad L_\lambda:M_\lambda:N_\lambda&=\frac{x}{a^2+\lambda}:\frac{y}{b^2+\lambda}:\frac{z}{c^2+\lambda}\\(s=\mu)\quad L_\mu:M_\mu:N_\mu&=\frac{x}{a^2+\mu}:\frac{y}{b^2+\lambda}:\frac{z}{c^2+\mu}\\(s=\nu)\quad L_\nu:M_\nu:N_\nu&=\frac{x}{a^2+\nu}:\frac{y}{b^2+\nu}:\frac{z}{c^2+\nu}\end{aligned}\right\}\qquad(11.34)$$

在 (11.31)式中分别令 $s=\lambda$，μ 得二个曲面方程，将其相减消

去因子$(\lambda-\mu)$后得

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)}$$
$$=L_\lambda L_\mu+M_\lambda M_\mu+N_\lambda N_\mu=0 \tag{11.35}$$

可见$s=\lambda$和$s=\mu$二个曲面是互相正交的。对于曲面$s=\lambda$和$s=\nu$，以及曲面$s=\mu$与$s=\nu$也有相同的正交关系。

再求椭球坐标中线元的微分式。对（11.33）式取对数后再微分得

$$\left.\begin{aligned}2\frac{dx}{x}&=\frac{d\lambda}{a^2+\lambda}+\frac{d\mu}{a^2+\mu}+\frac{d\nu}{a^2+\nu}\\2\frac{dy}{y}&=\frac{d\lambda}{b^2+\lambda}+\frac{d\mu}{b^2+\mu}+\frac{d\nu}{b^2+\nu}\\2\frac{dz}{z}&=\frac{d\lambda}{c^2+\lambda}+\frac{d\mu}{c^2+\mu}+\frac{d\nu}{c^2+\nu}\end{aligned}\right\} \tag{11.36}$$

利用这些公式可将正交条件（11.35)写成

$$\frac{\partial x}{\partial\lambda}\frac{\partial x}{\partial\mu}+\frac{\partial y}{\partial\lambda}\frac{\partial y}{\partial\mu}+\frac{\partial z}{\partial\lambda}\frac{\partial z}{\partial\mu}=0 \tag{11.37}$$

线元的平方是

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=H_1^2(d\lambda)^2+H_2^2(d\mu)^2+H_3^2(d\nu)^2 \tag{11.38}$$

式中不出现$d\lambda d\mu$，$d\mu d\nu$，$d\nu d\lambda$各项是由于正交性（11.37)式的原故。

至于系数H_1，H_2，H_3也不难求出。例如对于H_1，有

$$H_1^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda}\right)^2$$
$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}\right\}$$

代入（11.33)式得

$$4H_1^2=\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2+\lambda)(a^2-b^2)(a^2-c^2)}$$
$$+\frac{(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2+\lambda)(b^2-c^2)(b^2-a^2)}$$

$$+\frac{(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2+\lambda)(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

$$=\frac{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)} \qquad (11.39\,\mathrm{A})$$

这个结果可以通过将最后的式子表达为部分分式而得到。同样过程得

$$\left.\begin{aligned} 4H_2^2&=\frac{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}{(a^2+\mu)(b^2+\mu)(c^2+\mu)} \\ 4H_3^2&=\frac{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}{(a^2+\nu)(b^2+\nu)(c^2+\nu)} \end{aligned}\right\} \qquad (11.39\,\mathrm{B})$$

（2）坐标用椭圆函数表示

利用椭圆函数能够将直角坐标（x，y，z）与椭球坐标（λ，μ，ν）间的非唯一性(见(11.33)式))消去。为此，令

$$-s=\mathscr{P}(U)+D \qquad (11.40)$$

并由下式

$$4\mathscr{P}^2(U)-g_2\mathscr{P}(U)-g_3$$
$$=-4(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s) \qquad (11.41)$$

确定函数$\mathscr{P}$的不变量g_2，g_3。在(11.40)式中依次用$-a^2$，$-b^2$，$-c^2$代替s，同时相应的以e_1，e_2，e_3($e_1=\mathscr{P}(\omega)$，$e_2=\mathscr{P}(\omega+\omega')$，$e_3=\mathscr{P}(\omega')$)代替$\mathscr{P}(U)$得

$$a^2=e_1+D$$
$$b^2=e_2+D$$
$$c^2=e_3+D$$

考虑到$e_1+e_2+e_3=0$，得

$$D=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

故三个根为

$$\left.\begin{aligned} e_1&=a^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \\ e_2&=b^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \\ e_3&=c^2-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) \end{aligned}\right\} \qquad (11.42)$$

这三个根满足 $e_1>e_2>e_3$。因这些根均是实数，故 ω 是 实数，而 ω' 是虚数。

今引出参数 u，v，w 以替代椭球坐标 λ，μ，ν。为此在 (11.40) 式中依次令 s 等于 λ，μ，ν，而相应地令 U 等于 u，v，w，则得

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda &= -\mathscr{P}(u)-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\\
\mu &= -\mathscr{P}(v)-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\\
\nu &= -\mathscr{P}(w)-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)
\end{aligned}\right\}\qquad(11.43)
$$

将此式连同(11.42)式代入(11.33)式得

$$
\left.\begin{aligned}
x^2 &= \frac{-[\mathscr{P}(u)-e_1][\mathscr{P}(v)-e_1][\mathscr{P}(w)-e_1]}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}\\
y^2 &= \frac{-[\mathscr{P}(u)-e_2][\mathscr{P}(v)-e_2][\mathscr{P}(w)-e_2]}{(e_2-e_3)(e_2-e_1)}\\
z^2 &= \frac{-[\mathscr{P}(u)-e_3][\mathscr{P}(v)-e_3][\mathscr{P}(w)-e_3]}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}
\end{aligned}\right\}\qquad(11.44)
$$

将(5.19)和(5.21)式代入上式，二边取平方根，得

$$
\left.\begin{aligned}
x &= ie^{-\eta_1\omega_1}\sigma^2(\omega_1)\,\frac{\sigma_1(u)\sigma_1(v)\sigma_1(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)}\\
y &= ie^{-\eta_2\omega_2}\sigma^2(\omega_2)\,\frac{\sigma_2(u)\sigma_2(v)\sigma_2(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)}\\
z &= ie^{-\eta_3\omega_3}\sigma^2(\omega_3)\,\frac{\sigma_3(u)\sigma_3(v)\sigma_3(w)}{\sigma(u)\sigma(v)\sigma(w)}
\end{aligned}\right\}\qquad(11.45)
$$

$$(\omega_1=\omega,\quad \omega_2=-\omega-\omega',\quad \omega_3=\omega')$$

这个公式将 x，y，z 表示成参量 u，v，w 的函数，而后者与椭球坐标（λ，μ，ν）的关系如（11.43）式所示。适当选择 u，v，w 的变化范围，能使（x，y，z）与（λ，μ，ν）间存在单值对应关系。

坐标（x，y，z）也可用西他函数表示。利用（3.95)式，由(11.45）式得

$$\left.\begin{aligned}
x &= \frac{i\vartheta_1'}{2\omega_1\vartheta_2}\frac{\vartheta_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_2\left(\frac{v}{2\omega_1}\right)\vartheta_2\left(\frac{w}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{v}{2\omega_1}\right)\vartheta\left(\frac{w}{2\omega_1}\right)} \\
y &= \frac{i\vartheta_1'}{2\omega_1\vartheta_3}\frac{\vartheta_3\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_3\left(\frac{v}{2\omega_1}\right)\vartheta_3\left(\frac{w}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{v}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega_1}\right)} \\
z &= \frac{i\vartheta_1'}{2\omega_1\vartheta_4}\frac{\vartheta_4\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_4\left(\frac{v}{2\omega_1}\right)\vartheta_4\left(\frac{w}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{v}{2\omega_1}\right)\vartheta_1\left(\frac{w}{2\omega_1}\right)}
\end{aligned}\right\} \quad (11.46)$$

坐标（x，y，z）又可以用雅各比函数表示。用变量α，β，γ替代λ，μ，ν。令

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= (a^2-b^2)\mathrm{sn}^2\alpha - a^2 \\
\mu &= (a^2-b^2)\mathrm{sn}^2\beta - a^2 \\
\nu &= (a^2-b^2)\mathrm{sn}^2\gamma - a^2 \\
k^2 &= \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}, \quad k'^2 = \frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}
\end{aligned}\right\} \quad (11.47)$$

将此式代入（11.33)式的第一式，取平方根得

$$x = k^2\sqrt{a^2-c^2}\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma \qquad (11.48\text{A})$$

由(11.47) 式得

$$\begin{aligned}
b^2+\lambda &= (b^2-a^2)\mathrm{cn}\,\alpha \quad & c^2+\lambda &= (c^2-a^2)\mathrm{dn}\,\alpha \\
b^2+\mu &= (b^2-a^2)\mathrm{cn}\,\beta \quad & c^2+\mu &= (c^2-a^2)\mathrm{dn}\,\beta \\
b^2+\nu &= (b^2-a^2)\mathrm{cn}\,\gamma \quad & c^2+\nu &= (c^2-a^2)\mathrm{dn}\,\gamma
\end{aligned}$$

将这二组式子依次代入（11.33)式的第二和第三式，取平方根得

$$\left.\begin{aligned}
y &= -\frac{k^2}{k'}\sqrt{a^2-c^2}\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\beta\,\mathrm{cn}\,\gamma \\
z &= \frac{i}{k'}\sqrt{a^2-c^2}\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,\beta\,\mathrm{dn}\,\gamma
\end{aligned}\right\} \quad (11.48\text{B})$$

令 $t=\mathrm{su}z$，$z=\alpha$，β，γ，相应地 $s=\lambda$，μ，ν，由(11.47)式得

$$K=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\int_{-a^2}^{-b^2}\frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}$$

$$(11.49)$$

由(11.47)和(11.49)式可以看出，当ν由$-a^2$变到$-b^2$时，$\pm r$由0到K，或者是r由$-K$经过0到K。进一步利用(2.46)和(2.47)式等可以看出，当μ由$-b^2$到$-c^2$时，$\pm\beta$由K到$K+iK'$；当λ由$-c^2$到$+\infty$时，$\pm\alpha$由$K+iK'$到iK'，或是α由$-K+iK'$到iK'，再由iK'到$K+iK'$。

§11.3　拉梅方程与椭圆函数

（1）椭球坐标系的拉普拉斯方程

将直角坐标（x，y，z）中的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0 \qquad (11.50\text{A})$$

化为椭球坐标（λ，μ，ν）的方程

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right)+\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right)=0 \qquad (11.50\text{B})$$

式中H_1，H_2，H_3同(11.38)式。藉助(11.39)式，得到如下方程

$$(\mu-\nu)\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{\partial\Psi}{\partial\lambda}\right]+(\lambda-\nu)\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{\partial\Psi}{\partial\mu}\right]+(\lambda-\mu)\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\right]=0$$

$$(11.50\text{C})$$

式中$\varphi(s)=(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)$

该方程用分离变量法求解．令$\Psi=\Lambda(\lambda)M(\mu)N(\nu)$，得

$$\frac{\mu-\nu}{\Lambda}\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right]$$

$$+\frac{\lambda-\nu}{M}\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{d}{\partial\mu}\left[\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{dM}{d\mu}\right]$$

$$+\frac{\lambda-\mu}{N}\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{d}{d\nu}\left[\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{dN}{d\nu}\right]=0 \qquad (11.51)$$

另外存在下列恒等式

$$(\mu-\nu)[n(n+1)\lambda+C]+(\nu-\lambda)$$

$$\cdot[n(n+1)\mu+C]+(\lambda-\mu)$$

$$\cdot[n(n+1)\nu+C]\equiv 0 \qquad (11.52)$$

式中n和C是常数。比较(11.51)与(11.52)式，得

$$\left.\begin{aligned}
&4\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{d}{d\lambda}\left[\sqrt{\varphi(\lambda)}\frac{d\Lambda}{d\lambda}\right]=[n(n+1)\lambda+C]\Lambda\\
&-4\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{d}{\partial\mu}\left[\sqrt{-\varphi(\mu)}\frac{dM}{d\mu}\right]\\
&\qquad=[n(n+1)\mu+C]M\\
&4\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{d}{d\nu}\left[\sqrt{\varphi(\nu)}\frac{dN}{d\nu}\right]=[n(n+1)\nu+C]N
\end{aligned}\right\}$$

(11.53)

这三个方程具有相同的形式，称为拉梅（Lame）方程。当n为正整数时，这种微分方程的解称为拉梅函数。我们只需研究三个方程中的一个，例如第一个方程，将其展开后得

$$\frac{d^2y}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right)\frac{dy}{ds}$$

$$-\frac{n(n+1)s+C}{4(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}y=0 \qquad (11.54)$$

应用(11.42)和(11.43)式，后者一般可写成

$$s=-t-\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

则(11.54)式变成

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{t-e_1}+\frac{1}{t-e_2}+\frac{1}{t-e_3}\right)\frac{dy}{dt}$$

$$-\frac{n(n+1)t+B}{4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3)}y=0$$

式中

$$B=\frac{1}{3}n(n+1)(a^2+b^2+c^2)-C$$

考虑到 $t=\mathscr{P}(u)$，拉梅微分方程最后化为

$$\frac{d^2y}{du^2}=[n(n+1)\mathscr{P}(u)+B]y \tag{11.55}$$

这个方程是用相同周期的椭圆函数作系数的齐次线性微分方程的特殊形式，是拉梅首先研究的，其通解是有理型函数，当 n 是正整数时，适当选择常数 B，其解为椭圆函数。

（2）拉梅方程的解

为了求出(11.55)式的解，需要应用厄米（Hermite）和毕伽(Picard)的有关定义和定理[1]。其主要内容是

(i) 若有理型函数 $f(u)$ 满足

$$f(u+2\omega)=\rho f(u),\quad f(u+2\omega')=\rho' f(u) \tag{11.56}$$

则称 f 为第二种双周期函数，其周期为$(2\omega,\ 2\omega')$。式中 ρ，ρ' 是常数(称作函数的因子)。

(ii) 若方程(11.55) 的通解是有理型函数，则它至少具有一个特解是第二种双周期函数。定理证明略。下面应用该定理求解拉梅方程。

设 $\varphi(u)$ 是方程(11.55) 的特解，它是具有因子 ρ，ρ' 的第二种双周期函数。今构造另一函数

$$\psi(u)=\varphi(u)e^{-bu}\frac{\sigma(u)}{\sigma(u-a)} \tag{11.57}$$

式中 a，b 是待定的常数。令 u 增加周期 2ω，$2\omega'$，应用(3.18)式得

---

[1] 见H. И. 阿希泽尔：《椭圆函数论纲要》，商务印书馆，1966，P. 207—209。

$$\psi(u+2\omega)=\rho\varphi(u)e^{-b(u+2\omega)}e^{2\eta a}\frac{\partial(u)}{\sigma(u-a)}$$

$$=e^{2(\eta a-\omega b)}\psi(u)$$

同理得

$$\psi(u+2\omega')=\rho' e^{2(\eta' a-\omega' b)}\psi(u)$$

为了使$\psi(u)$具有周期2ω，$2\omega'$，应满足

$$e^{-2(\eta a-\omega b)}=\rho$$

$$e^{-2(\eta' a-\omega' b)}=\rho'$$

即

$$\omega b-\eta a=\frac{1}{2}\ln\rho$$

$$\omega' b-\eta' a=\frac{1}{2}\ln\rho'$$

因为该方程组的行列式$\omega\eta'-\omega'\eta\neq 0$，故常数$a$，$b$是可以确定的。

可以将椭圆函数$\psi(u)$按(4.9)和(4.10)式表示成σ函数的形式。设$u=0$点是$\varphi(u)$的n阶极点，所以该点是$\psi(u)$的$n-1$阶极点，$\psi(u)$的另一个一阶极点是$u=a$。令b_1，b_2，…，b_n是$\varphi(u)$的零点，由(4.10)式知下列等式成立

$$b_1+b_2+\cdots+b_n=a \tag{11.58}$$

函数$\psi(u)$的表示式是

$$\psi(u)=C\frac{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}{\sigma(u-a)[\sigma(u)]^{n-1}} \tag{11.59}$$

由(11.57)式得

$$\varphi(u)=Ce^{bu}\frac{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\cdots\sigma(u-b_n)}{[\partial(u)]^n} \tag{11.60}$$

所得的$\varphi(u)$应满足方程(10.55)，据此可确定出常数$b_1, b_2, \cdots, b_n$；b。

作为一个例子，下面研究$n=1$的最简单的情形。当$n=1$时，(11.55)式变成

$$y''=[2\mathscr{P}(u)+B]y \tag{11.61}$$

根据(11.60)式，其一个特解是

$$y_1 = e^{-\alpha u}\frac{\sigma(u+\beta)}{\sigma(u)} \tag{11.62}$$

对此式求对数的导数得

$$\frac{y_1'}{y'} = -\alpha + \zeta(u+\beta) - \zeta(u)$$

进一步得

$$\frac{y_1''}{y_2} = \wp(u) - \wp(u+\beta) + [-\alpha + \zeta(u+\beta) - \zeta(u)]^2 \tag{11.63}$$

此式与(11.61) 式比较得

$$\wp(u) + \wp(u+\beta) + B = [-\alpha + \zeta(u+\beta) - \zeta(u)]^2$$

再应用函数$\wp$的加法公式 (5.9)和(5.15)式得

$$B - \wp(\beta) + \frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u) - \wp'(\beta)}{\wp(u) - \wp(\beta)}\right]^2 = \left[\zeta(\beta) - \alpha + \frac{1}{2}\frac{\wp'(u) - \wp''(\beta)}{\wp(u) - \wp(\beta)}\right]^2$$

为使这个恒等式成立，必有

$$B = \wp(\beta), \quad \alpha = \zeta(\beta) \tag{11.64}$$

代入 (11.62)式得 $n=1$ 时拉梅方程的特解

$$y_1 = e^{-u\zeta(\beta)}\frac{\sigma(u+\beta)}{\sigma(u)} \tag{11.65A}$$

若β不是半周期，即设$B \neq e_k$ ($k=1, 2, 3$)，则可用$-\beta$替代β，得到另一个独立的特解

$$y_2 = e^{u\zeta(\beta)}\frac{\sigma(u-\beta)}{\sigma(u)} \tag{11.65B}$$

§11.4 圆环域的格林函数

本节要研究在复数平面的圆环域上构造格林函数的问题，所得的结果用西他函数表示。不失一般性，假定w面上圆环R的边界分别是$|w|=1$和$|w|=q$，$q<1$。再设圆环中已知点c位于

正实轴上，满足 $q < c < 1$。

我们欲求的解析函数 $f(w)$，应满足如下条件：

(i) $f(w)$在域R内和周界上是正则的。

(ii) $|f(w)|$在R内为单值函数。

(iii) $|f(w)|$在R的周界上等于1。

(iv) $f(w)$在R内仅仅具有一阶零点$w = c$。

由此可见

$$\text{Re}\ln f(w) = \ln|f(w)|$$

正是圆环域R的格林函数。而$f(w)$可称作圆环域的格林复函数。为了确保$f(w)$是单值的，应除去模数为1的任意常数因子。

分析的方法是将函数$f(w)$开拓到全平面，并利用边界的镜像得到全平面上的极点和零点，据此可构造出所要求的函数。

圆环域R中的任意点w，通过内、外周界圆的镜像点分别是

$$w_1 = \frac{q^2}{\bar{w}}, \quad w_2 = \frac{1}{\bar{w}} \tag{11.66}$$

因为函数$f(w)$在圆环R的内外周界上的模数为1，故在w_1，w_2点的函数值与在w点的值满足下式

$$\left.\begin{aligned} f(w)\overline{f(w_1)} = 1 \\ f(w)\overline{f(w_2)} = 1 \end{aligned}\right\} \tag{11.67}$$

假定想要得到的$f(w)$是一个实函数，即满足关系式

$$\overline{f(\bar{w})} = f(w) \tag{11.68}$$

则(11.67)式变成

$$\left.\begin{aligned} f(w)f\left(\frac{q^2}{w}\right) = 1 \\ f(w)f\left(\frac{1}{w}\right) = 1 \end{aligned}\right\} \tag{11.69}$$

可以用适当选择待定函数$f(w)$的系数，使得上二式成立，这在下面的分析中将会看到。

应用上式能将函数$f(w)$解析开拓，先从原始原环开拓到与其相连接的内、外二个圆环，然后开拓至全平面，但应将$w = 0$

和$w=\infty$除外。

现在根据(11.66)和(11.67)式分析函数的零点和极点。因为c点是$f(w)$的一阶零点，故由此二式知$w=q^2/c$和$w=1/c$是$f(w)$的一阶极点。再利用此二式知$w=c/q^2$和$w=q^2c$是$f(w)$的一阶零点。以此开拓类推下去。可见$f(w)$的零点和极点是

一阶零点：$w=q^{2n}c$

一阶极点：$w=q^{2n}/C$

$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$$

如前所述$w=0$，$w=\infty$没有考虑在内，函数不再有其他零点和极点。

今构造下列函数

$$F(w)=\frac{\left(1-\dfrac{w}{c}\right)\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\dfrac{w}{c}\right)\left(1-q^{2n}\dfrac{c}{w}\right)}{(1-cw)\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}cw)\left(1-q^{2n}\dfrac{1}{cw}\right)} \tag{11-70}$$

显然，它与$f(w)$有相同的零点和极点。分别用q^2/w和$1/w$替代w，则得

$$\left.\begin{aligned}F\left(\frac{q^2}{w}\right)&=\frac{1}{F(w)}\\F\left(\frac{1}{w}\right)&=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{F(w)}\end{aligned}\right\} \tag{11.71}$$

可见函数$F(w)$不满足(11.69)式，因此也不满足条件(iii)。为了满足(11.69)式，可令$F(w)$乘上包含有二个待定常数α，β的系数，即引入

$$F_1(w)=\beta w^{\alpha}F(w)$$

使$F_1(w)$满足(11.69)式。将$F_1(w)$代入(11.69)式得

$$\beta w^{\alpha}F(w)\frac{\beta q^{2\alpha}}{w^{\alpha}}F\left(\frac{q^2}{w}\right)=\beta^2q^{2\alpha}F(w)F\left(\frac{q^2}{w}\right)=1$$

$$\beta w^{\alpha}F(w)\frac{\beta}{\omega^{\alpha}}F\left(\frac{1}{w}\right)=\beta^2F(w)F\left(\frac{1}{w}\right)=1$$

此式与（11.71）式比较得

$$\beta^2 q^{2\alpha}=1,\quad \beta^2=c^2$$

由此得

$$\beta=\pm c,\quad \alpha=-\frac{\ln c}{\ln q}$$

可见函数

$$F_1(w)=\pm c\, w^{-\frac{\ln c}{\ln q}} F(w)=f(w) \qquad (11.72)$$

满足所提出的全部要求，正是我们所待求的函数。

可以用西他函数表示 $f(w)$。令

$$q=e^{\pi i\tau}$$

应用（3.85）式，则得 $f(w)$ 的最后表示式

$$f(w)=\pm w^{-\frac{\ln c}{\ln q}} \frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w-\ln c}{2\pi i}\,\middle|\,\tau\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w+\ln c}{2\pi i}\,\middle|\,\tau\right)} \qquad (11.73)$$

也可以用 $-1/\tau$ 代替 τ，参看（7.32）式可将 $f(w)$ 表示为

$$f(w)=\pm\frac{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w-\ln c}{2\pi\tau i}\,\middle|\,-\dfrac{1}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\dfrac{\ln w+\ln c}{2\pi\tau i}\,\middle|\,-\dfrac{1}{\tau}\right)} \qquad (11.74)$$

§11.5 圆环的狄利克莱问题

已知解析函数 $F(w)$ 可以用它的实部边界值来表示。例如，若变量域是单位圆（$|w|\leqslant 1$），则可得到如下具有边界值 $b(\theta)$（$w=e^{i\theta}$）的泊松（Poisson）积分公式：

$$F(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta)\frac{e^{i\theta}+w}{e^{i\theta}-w}d\theta+iC \qquad (11.75)$$

式中 C 是一个实常数。

我们的任务是由圆域转到圆环域，作出相类似的公式。

设复变量 w 平面上有圆环域 R，其外边界和内边界分别是 $|w|=1$ 和 $|w|=q$ 的圆，并有 $q<1$。

所要求的解析函数$F(w)$应满足：

（i）$F(w)$在R域内及其边界上是正则的。

（ii）$F(w)$在R域内及其边界上是单值的。

（iii）在圆环R的边界上函数$F(w)$的实数部分为已知，即

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} F(qe^{i\theta}) &= a(\theta) \\ \operatorname{Re} F(e^{i\theta}) &= b(\theta) \end{aligned} \tag{11.76}$$

（iv）$a(\theta)$与$b(\theta)$在边界上是连续的，二者间存在如下关系式

$$\int_0^{2\pi} a(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} b(\theta)d\theta \tag{11.77}$$

条件（iv）是很易证明的，因为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(re^{i\theta})d\theta = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{F(w)}{w}dw$$

右边的闭合积分路径是以$w=0$为圆心，半径为r（$q<r<1$）的圆周，该积分不取决于r的选取。若取上式左方被积函数实数部分，也有相同的性质。可以令r依次趋于1和q，并注意到积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} F(re^{i\theta})d\theta$$

能够取所要求的极限，从而得（11.77）式。

现在来构造所要求的函数。先将该待求函数$F(w)$展成罗朗级数

$$F(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n w^{-n} \tag{11.78}$$

并假定这个展开式不仅在R内成立，在边界上也成立。其次取上式二边的实数部分，从而得函数$a(\theta)$及$b(\theta)$的傅里叶级数式，由这些展开式得出系数a_n（积分形式）。最后将所得系数a_n代入（11.78）式中求和，得到下列公式

$$F(w) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} b(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w - \frac{\omega}{\pi}\theta\right)d\theta$$

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} a(\theta)\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}\theta-\omega'\right)d\theta+iC$$

(11.79)

式中ω是任意正实数，而纯虚数ω'满足$q=e^{\pi i\omega'/\omega}$。$C$是任意实常数。$\zeta(u)=\zeta(u\ \omega,\ \omega')$。

为了说明（11.79）式即是所要求的函数，需要证明它满足条件（i））ii）（iii）。

由于下列二函数在圆环域R内是正则的

$$\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}\theta\right),\quad \zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}\theta-\omega'\right)$$

可见由（10.79）式确定的函数$F(w)$在R内是正则的。

为了说明$F(w)$是单值的，须证明当w绕圆周$|w|=r$（$q<r<1$）绕一周时，函数值不改变。令w由$re^{i\theta}$—$re^{i(\theta+2\pi)}$，相应地（11.79）式被积函数中的ζ函数变成

$$\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}\theta+2\omega\right),$$

$$\zeta\left(\frac{\omega}{\pi i}\ln w-\frac{\omega}{\pi}\theta-\omega'+2\omega\right)$$

但因为

$$\zeta(u+2\omega)=\zeta(u)+2\eta$$

故（11.79）式右方积分等于

$$F(w)+\frac{2i\omega}{\pi^2}\eta\left\{\int_0^{2\pi} b(\theta)d\theta-\int_0^{2\pi} a(\theta)d\theta\right\}$$

由（11.77）式知上式的积分项彼此相约，所得到的结果仍是$F(w)$，这表明函数是单值的。

最后证明函数（11.79）式满足（11.76）式。在R的外边界上及R中取有相同幅角θ的二点

$$w_0=e^{i\theta_0},\quad w=re^{i\theta_0}\quad (q<r<1)$$

若函数$b(s)$只在θ_0处是连续的，则应证明

$$\lim_{r\to 1}\operatorname{Re}F(re^{i\theta_0})=b(\theta_0)$$

为此，将（11.79）式改写成下式

$$F(re^{i\theta_0}) = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} b(\theta)\frac{1}{\frac{\omega}{\pi i}\ln r + \frac{\omega}{\pi}(\theta_0 - \theta)}d\theta$$

$$+\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} b(\theta)\left\{\zeta\left[\frac{\omega}{\pi i}\ln r + \frac{\omega}{\pi}(\theta_0 - \theta)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\frac{\omega}{\pi i}\ln r + \frac{\omega}{\pi}(\theta_0 - \theta)}\right\}d\theta$$

$$-\frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} a(\theta)\zeta\left[\frac{\omega}{\pi i}\ln r\right.$$

$$\left.+\frac{\omega}{\pi}(\theta_0 - \theta) - \omega'\right]d\theta + iC$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + iC$$

I_2 被积函数的大括号部分在 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 范围内 是 r ($q^{1/2} < r < 1$) 的连续函数，故能取 $r \to 1$ 的极限，得

$$\lim_{r\to 1} I_2 = \frac{i\omega}{\pi^2}\int_0^{2\pi} b(\theta)\left\{\zeta\left[\frac{\omega}{\pi}(\theta_0 - \theta)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{\omega(\theta_0 - \theta)}\right\}d\theta$$

因为 ω 和 ω'/i 均是实数，故大括号内是实函数，因而 $\lim\limits_{r\to 1} I_2$ 是纯虚数量。同理可以证明 $\lim\limits_{r\to 1} I_3$ 也是个纯虚数量。

故

$$\lim_{r\to 1} \operatorname{Re} F(re^{i\theta_0}) = \lim_{r\to 1}\operatorname{Re}\frac{i\omega}{\pi^2}$$

$$\int_0^{2\pi} b(\theta)\frac{d\theta}{\frac{\omega}{\pi i}\ln r + \frac{\omega}{\pi}(\theta_0 - \theta)}$$

$$= \lim_{r\to 1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} b(\theta)\frac{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}{(\theta - \theta_0)^2 + \ln^2\left(\frac{1}{r}\right)}d\theta$$

$$= b(\theta_0)$$

这里使用了函数 $b(\theta)$ 在点 θ_0 连续的条件。

同理可以证明，当 $a(\theta)$ 在 θ_0 处连续时，有

$$\lim_{r\to q} \operatorname{Re} F(re^{i\theta_0}) = a(\theta_0)$$

这样，(11.79) 式是我们所要求的函数，就全部证明了。

§11.6 切比雪夫极值问题中椭圆函数的应用

(1) 切比雪夫极值（逼近）问题

切比雪夫逼近称作最佳逼近，是函数逼近论的一个重要组成部分。关于函数逼近问题的切比雪夫普遍定理可在有关的专著中查到[1]。这里我们仅作一简要说明。为便于了解有关椭圆函数的应用。

设在区间 $[a,\ b]$ 内给定一实函数 $g(x)$，另有一具有 n 个参数 a_1，…，a_n 的函数 $f(x)$（例如：$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$）。如果选择参数 a_i $(i=1,\ \cdots,\ n)$ 使下式在区间 $[a,\ b]$ 上成立

$$\max|g(x)-f(x)|=\min \tag{11.80}$$

则在切比雪夫意义[2]上讲，称 $f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上逼近函数 $g(x)$。

如图 11.2 所示，设 $|g-f|$ 的最大值 D 出现 m 次，位于 x_1，x_2，…，x_m $(x_1=a<x_2<\cdots<x_m=b)$ 上。以下将要说明，当这个极值问题有解时，$|g-f|$ 最大值的个数 m 与参数 a_i 的个数 n 之间存在一定关系。令

$$g(x)-f(x)=\phi(x,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

若 x 是固定的，则 ϕ 的微分为

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial a_1}da_1+\frac{\partial\phi}{\partial a_2}da_2+\cdots+\frac{\partial\phi}{\partial a_n}da_n$$

---

[1] 徐利治，周蕴时，孙玉柏：《逼近论》，国防工业出版社，1985。

[2] $|g-f|$ 的全部最大值相等，并等于在区间边界上 $|g-f|$ 的值。

图11.2 切比雪夫逼近：$f(x, a_1, \cdots, a_n)$逼近$g(x)$

现取n个数$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，令

$$da_1 : da_2 : \cdots : da_n = \lambda_1 : \lambda_2 : \cdots : \lambda_n$$

则在$|\phi|$取极值的点$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$上的微分为

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{a_1}(x_1)\lambda_1+\phi_{a_2}(x_1)\lambda_2+\cdots+\phi_{a_n}(x_1)\lambda_n=s_1\\&\phi_{a_1}(x_2)\lambda_1+\phi_{a_2}(x_2)\lambda_2+\cdots+\phi_{a_n}(x_2)\lambda_n=s_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\phi_{a_1}(x_m)\lambda_1+\phi_{a_2}(x_m)\lambda_2+\cdots+\phi_{a_n}(x_m)\lambda_n=s_m\end{aligned}\right\}\tag{11.81}$$

式中 $\phi_{a_i}=\dfrac{\partial\phi}{\partial a_i}$。如果该方程组当$s_i$与相应的$\phi(x_i)$取相反符号时有解$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，则将得到与前提矛盾的结果。因为此时可以在假定的解$\phi(x, a_1, a_2, \cdots, a_n)$的最大值$D$附近，找到另一个小于$D$值的解，$\phi(x, a_1+\varepsilon\mu_1, a_2+\varepsilon\mu_2, \cdots, a_n+\varepsilon\mu_n)$，其中$\varepsilon$是一个足够小的量。因此，$f(x)$在切比雪夫意义上逼近$g(x)$的必要条件是：(11.81)式是不可解的。

为了进一步说明这个逼近问题的必要条件，今取一特殊情形：$\phi(x, a_1, a_2, \cdots, a_n)\equiv x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，则(11.81)式变成

$$\left.\begin{aligned}&x_1^{n-1}\lambda_1+x_1^{n-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_n=s_1\\&x_2^{n-1}\lambda_1+x_2^{n-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_n=s_2\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&x_m^{n-1}\lambda_1+x_m^{n-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_n=s_m\end{aligned}\right\}\tag{11.82}$$

假如此方程组的数列 s_1，s_2，…，s_m 中变号的次数不大于 $n-1$（即 $m\leqslant n$），此时下式的零点（共 $n-1$ 个）

$$x^{n-1}\lambda_1+x^{n-2}\lambda_2+\cdots+\lambda_n$$
$$=c\,(x_1-x_1')(x-x_2')\cdots(x-x_{n-1}'),\quad c\text{—常数}$$

分别位于每一对变号 s_i 及 s_{i+1} 所对应的 x_i 及 x_{i+1} 二点之间，则（11.82）式是可解的（因为方程的个数≤变量的个数）。但是，假如 s_1，s_2，…，s_m 间最少有 n 次变号（$m>n$），亦即在 $\phi(x)$ 交替取正负值的极值点（见图 11.3）至少有 $n+1$ 个时，则（11.82）式是不可解的。图 11.3 表示出这种极值问题中 $f(x)$ 的变化规律，此例的 $g(x)=0$，$n=4$，极值点数 $m=5$，零点数 $=4$，因自变量数 n 小于方程数 m，故（11.82）式是不可解的。总之在切比雪夫意义下实现 $f(x)$ 对 $g(x)$ 逼近的必要条件是：（11.82）式是不可解的。

当逼近函数 $f(x)$ 取如上述的多项式形式时，按最佳逼近原则，$f(x)$ 应是切比雪夫多项式。现在来求解这种切比雪夫多项式。设在区间〔-1，1〕内

$$g(x)=0$$
$$y=f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$

下面将会看到，在切比雪夫意义上 y 逼近 g 时，所得 a_1，a_2，…，a_n 的解，正构成切比雪夫多项式。

如前所述 x 在区间〔-1，1〕内至少有 $n+1$ 个极值点使 $|f|=D$，因此除了在 $x=\pm1$ 边界点外至少有 $n-1$ 个内极值点，在这些点上 $y'=0$。因为 y' 是 $n-1$ 阶的，故 $y'=0$ 的根应是彼此不相同的，即 y' 的根只能是单根。另一方面，这些内极值点又是方程式 y^2-D^2 的零点，而且是二阶零点。由于在内极值点处 $y'=0$，故 $(y^2-D^2)'=2yy'=0$，又 y' 仅具有单极点，故 y^2-D^2 应比例于 y'^2。另外在 $x=\pm1$ 的边界点处，$y=D$，故 y^2-D^2 应包含因子（$1-x$）和（$1+x$）。故得

$$D^2-y^2=c^2(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

式中 c 为一比例常数，令 $t=y/D$，上式变成

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{1}{c}\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{11.83}$$

当 x 由 -1 连续变到 $+1$ 时，t 恰好在 -1 与 1 间摆动 n 次。如将上式由 $x=-1$ 至 $x=+1$ 进行积分，$c=+\frac{1}{n}$。上列微分方程的解当 $X=1$ 时 $y=+D$ 应是

$$y=D\cos(n\arccos x) \tag{11.84}$$

这就是众所周知的切比雪夫函数。令 $x=\cos\varphi$，即可得关于 x 的 n 次多项式——切比多雪夫多项式。

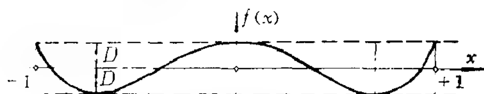


图11.3　切比雪夫多项式例子（$n=4$）

（2）雅各比椭圆函数在切比雪夫极值问题中的应用

首先研究下列函数的极值问题

$$y=\prod_{\mu=1}^{n/2}\frac{P_\mu^2-\Omega^2}{1-P_\mu^2\Omega^2} \tag{11.85}$$

$$y(\Omega^{-1})=[y(\Omega)]^{-1}$$

即试求在 $0\leqslant\Omega\leqslant k<1$ 中取尽可能小的最大值。式中 P_1^2，P_2^2，…，$P_{n/2}^2$ 将起着前面所研究函数 $f(x)$ 中参数 a_1，a_2，…，a_n 的作用，而 $y=\pm D$（$D>0$）的极值点 Ω_1，Ω_2，…，Ω_m 将是待求的。因为

$$\frac{\partial}{\partial P_\mu^2}\left(\frac{P_\mu^2-\Omega^2}{1-P_\mu^2\Omega^2}\right)=\frac{P_\mu^2-\Omega^2}{1-P_\mu^2\Omega^2}\left(\frac{1}{P_\mu^2-\Omega^2}+\frac{1}{\Omega^{-2}-P_\mu^2}\right)$$

故（11.81）式现在变成

$$\left\{\frac{\partial y}{\partial P_1^2}\lambda_1+\frac{\partial y}{\partial P_2^2}\lambda_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial P_{[n/2]}^2}\lambda_{[n/2]}\right\}_{\Omega=\Omega_\nu}$$

$$\equiv\left\{y\sum_{\sigma=1}^{[n/2]}\left(\frac{1}{P_\sigma^2-\Omega^2}+\frac{1}{\Omega^{-2}-P_\sigma^2}\right)\lambda_\sigma\right\}_{\Omega=\Omega_\nu}=s_\nu \tag{11.86}$$

$$\nu=1,2,\cdots,m$$

以 $\prod_{\mu=1}^{[n/2]}(1-P_\mu^2\Omega^2)^2$ 乘上面的每一个方程，得

$$\left\{\Omega^n\prod_{\mu=1}^{[n/2]}(P_\mu^2-\Omega^2)(\Omega^{-2}-P_\mu^2)\cdot\prod_{\sigma=1}^{[n/2]}\left(\frac{1}{P_\sigma^2-\Omega^2}-\frac{1}{\Omega^{-2}-P_\sigma^2}\right)\lambda_\sigma\right\}_{\Omega=\Omega_\nu}=s'_\nu$$

$$\nu=1,\ 2,\ \cdots,\ m \qquad (11.86\text{A})$$

式中用$[n/2]$表示$n/2$中的最大整数值，若n是奇数，则$[n/2]=(n-1)/2$。(11.86A）式中大括号内的表示式是Ω^2的有理整函数，阶数为n，在$\Omega^2=1$和$\Omega^2=0$处取零值，而其他异于0和1的零值是互为倒数的，因为在（11.86A）式中可以互换Ω^2与$1/\Omega^2$。在Ω^2的变化区间（0，k）中，该表示式只能取零值$\left(\frac{n}{2}-1\right)$次。若在数列$y_\nu$与$s'_\nu$中最多有$\left(\frac{n}{2}-1\right)$次改变正负符号，则（11.86A）式的方程数$m$小于$n/2$，故$\lambda_1$，$\lambda_2$，…，$\lambda_{[n/2]}$的解存在，以致（11.86A）式大括号内表示式正好在每二个具有不同符号的连续的极值点间取零值一次。

由此得出结论，为了得到这个极值问题的解，要求（11.85）式的数列y_ν至少要变号$n/2$次。另外，关于P_ν的变化区间问题，由（11.85）式知，$\Omega^2=P_\nu^2$是y的零点，$\Omega^2=P_\nu^{-2}$是y的极点。因此如果在$0\leqslant\Omega\leqslant k<1$的区间内$y$具有尽可能小的最大值，则由（11.85）式知当$\Omega\geqslant k^{-1}$时，$y$具有尽可能大的最小值，故得$0<P_\nu^2<k^2$。下面求$P_\nu^2$。

为了求解这个极值问题，确定出P_ν，并求得极值D的大小和位置，须建立y作为Ω函数的微分方程，其初始条件是$\Omega=0$，$y=D$。显然（11.85）式是该微分方程的解。在建立微分方程之前，先对（11.85）式做进一步的分析。(11.85）式是偶的有理函数，故在区间（$-k^2$，k^2）内，它有n个根：$\Omega=\pm P_\mu(\mu=1,\ 2,\ \cdots,\ n/2)$；在每二个根之间有一个极值点，在每个极

值点上 $\frac{dy}{d\Omega}=0$ $\left(因为 \frac{dy}{d\Omega}\right.$ 变号，故这些 $\frac{dy}{d\Omega}$ 的零点是简单零点$\left.\right)$，并有 $|y|=D$。另外在 $\Omega=\pm k$ 点上，$|y|=D$。由（11.85）式，因为存在关系式 $y(\Omega^{-1})=[y(\Omega)]^{-1}$，故用 Ω^{-1} 代替 Ω 时，y 的零点 $\Omega_{0\mu}=\pm P_\mu$ 变换成极点 $\Omega_{\infty\mu}=\pm P_\mu^{-1}$，而极点仍变换成极点，但此时 $|y|=D^{-1}$。并且，在 $\Omega=\pm k^{-1}$ 处，亦有 $|y|=D^{-1}$。

现在来建立 y 所满足的微分方程。在 $dy/d\Omega=0$ 的点，D^2-y^2 和 $D^{-2}-y^2$ 都有二重零点（如同建立（11.83）式所考虑的），因此 $(D^2-y^2)(D^{-2}-y^2)$ 应比例于 $(dy/d\Omega)^2$，另外这个乘积在 $\Omega=\pm k$ 和 $\pm k^{-1}$ 处还各有一简单零点。因此得

$$(D^2-y^2)(D^{-2}-y^2)=\frac{1}{c_1^2}(1-k^2\Omega^2)(1-k^{-2}\Omega^2)\left(\frac{dy}{d\Omega}\right)^2 \tag{11.87}$$

对上式开方得 y 所满足的微分方程

$$\frac{dy}{d\Omega}=c_1\sqrt{\frac{(D^2-y^2)(D^{-2}-y^2)}{(1-k^2\Omega^2)(1-k^{-2}\Omega)}}$$

令

$$z=\frac{\Omega}{k}, \quad t=\frac{y}{D} \tag{11.88}$$

得

$$\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^4z^2)}}=\frac{Cdt}{\sqrt{(1-t^2)(1-D^4t^2)}}=du \tag{11.89}$$

式中 C 是常数，$C>0$。根据（11.85）式，当 $z=0$ 时，$\Omega=0$

$$y=\prod_{\nu=1}^{[n/2]}P_\nu^2=D$$

因此 $z=0$，$t=+1$。当 z 由 0 增至 1 时，Ω 由 0 增至 k，则 t 由 $+1$ 变到 -1，再由 -1 变至 $+1$，交替地摆动共 $[n/2]$ 次。当 t 由 $+1$ 至 -1 时，dt/dz 是负的，而 t 由 -1 至 $+1$ 时，则 dt/dz 是正的。故（11.89）式中如第一个根号选为正的，则

第二个根号的符号是完全被确定的。先考虑（11.89）式关于 z 的微分式，取 z 在 0～1 之间（Ω在 0～k 间）进行积分，相应地关于 t 的积分应从－1～＋1 积分 $n/2$ 次（或从 0～1 积分 n 次）。若取正根号，则得

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^4z^2)}}$$

$$=\frac{n}{2}C\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-D^4t^2)}}$$

即

$$K(k^2)=nCK(D^2) \tag{11.90 A}$$

若 z 由 1 增至 $k^{-2}(>1)$，而 t 单调地从 ±1 变到 $\pm D^{-2}$，若取正的根号，则由（11.89）式得

$$\int_1^{1/k}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^4z^2)}}$$

$$=C\int_1^{1/D^2}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-D^4t^2)}}$$

即

$$K'(k^2)=CK'(D^2) \tag{11.90 B}$$

关于微分方程（11.89），它是二个相等的微分式用一个公共微分 du 来定义的。u 既可看作是 z（即Ω）的函数，也可看作是 t（即 y）的函数。令

$$Z=Ct \tag{11.91}$$

则可将（11.89）式变为下列等效的二个微分方程

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{dz}{du}\right)^2=(1-a^2z^2)(1-b^2z^2),\quad a=1,\quad b=k^2\\&\left(\frac{dZ}{du}\right)^2=(1-A^2Z^2)(1-B^2Z^2),\ A=C^{-1},\ B=C^{-1}D^2\end{aligned}\right\} \tag{11.92}$$

$$0<b<a,\quad 0<B<A \tag{11.93}$$

其初始条件是

$$u=0,\quad z=0,\quad t=1,\quad Z=A^{-1} \tag{11.94}$$

显然满足（11.92）二式的函数 $z=f(u)$ 和 $Z=F(u)$ 是雅各比椭圆函数，二者与 $\mathrm{sn}\,u$ 只是在刻度上的不同。考虑到初始条件（11.94）式，应有 $Z=F(u+\Omega_1)$。（见图 11.4(b)）。

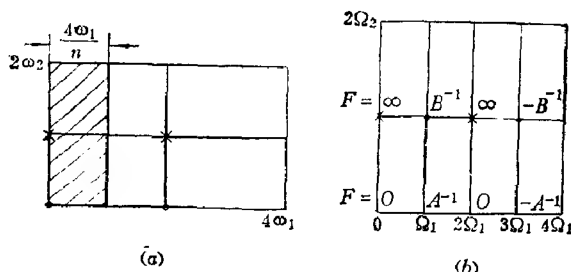


图11.4　u 平面上 $f(u)$ 和 $F(u)$ 的周期四边形

设函数 f 的周期为（$4\omega_1$，$2\omega_2$），F 的周期为（$4\Omega_1$，$2\Omega_2$）。可以在预给 a 及 b（$a=1$，$b=k^2$）的条件下，适当选择 C 和 D（或 A 和 B）以使（11.90 A）及（11.90 B）二式的周期间的关系式成立，也即是使二者的实周期差 n 倍，而虚周期相等，即使下式成立

$$\Omega_1=\frac{\omega_1}{n}\qquad \Omega_2=\omega_2 \tag{11.95}$$

由（11.91）式知，Z 的周期四边形是 t 的周期四边形的 C 倍，故在（11.95）′式成立时，将 $F(u)$ 看作为 $f(u)$ 的函数是可求的。由于

$$\mathrm{sn}\,u=-\mathrm{sn}(-u),\quad \mathrm{sn}(K+u)=\mathrm{sn}(K-u)$$

故

$$f(-u)=-f(u)\qquad f(\omega_1+u)=f(\omega_1-u) \tag{11.96 A}$$

在上式的第二个方程中用 $u+\omega_1$ 替代 u，得

$$f(u+2\omega_1)=-f(u) \tag{11.96 B}$$

由（11.95）式得知 $f(u)$ 和 $F(u)$ 均是具有周期 $4\omega_1$ 及 $2\omega_2$ 的椭圆函数，在 $f(u)$ 的周期四边形（单位胞腔）中，$F(u)$ 具有 $2n$ 个单零点和 $2n$ 个单极点，其位置是

$2n$ 个单零点：

$$u=\frac{2\nu\omega_1}{n}$$

$2n$ 个单极点：

$$u=\frac{2\nu\omega_1}{n}+\omega_2$$

$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2n-1$$

图 11.4 给出了 $f(u)$ 和 $F(u)$ 的周期四边形。其中图（a）同时表示了二函数的四边形，其斜线部分是 $F(u)$ 的四边形。图（b）表示在 $F(u)$ 的四边形上各特殊点处的 F 值。

根据以上分析可将 $F(u)$ 写成 $f(u)$ 的下列函数式

$$F(u)=\frac{\prod_{\nu=0}^{n-1} f\left(u+\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)} \tag{11.97}$$

该式二边在以 $4\omega_1$ 和 $2\omega_2$ 为边的周期四边形内具有相同的单零点和极点，如果二边除以 $f(u)$，令 $u\to 0$，则等式左边 $F(u)/f(u)$ 为不定式 $0/0$，因 $f'(0)=+1$，$F'(0)=+1$，故 (11.97) 式成立

利用 (11.97)，(11.95) 式及图11.4(b)，可以得到

$$\frac{B}{A}=\frac{F(\Omega_1)}{F(\Omega_1+\Omega_2)}=\frac{F\left(\frac{\omega_1}{n}\right)}{F\left(\frac{\omega_1}{n}+\omega_2\right)}$$

$$=\prod_{\nu=0}^{n-1}\frac{f\left(\frac{(2\nu+1)\omega_1}{n}\right)}{f\left[\omega_2+\frac{(2\nu+1)\omega_1}{n}\right]}$$

$$=(ab)^n\prod_{\nu=0}^{n-1} f^2\left[\frac{(2\nu+1)\omega_1}{n}\right] \tag{11.98}$$

这里应用了恒等式

$$f(u)f(u+\omega_2)=f(\omega_1)f(\omega_1+\omega_2)=(ab)^{-1} \tag{11.99}$$

该式成立是因为相乘的二函数的零点和极点互相抵消，故其乘积是没有零点和极点的，显然在$u=\omega_1$时，上式成立。

由（11.92）和（11.98）式得

$$\frac{B}{A}=D^2=k^{2n}\prod_{\nu=0}^{n-1}\operatorname{sn}^2\left[\frac{(2\nu-1)K}{n},\ k^2\right]$$

考虑到$\operatorname{sn}K=1$，$\operatorname{sn}(2K-u)=\operatorname{sn}u$，上式乘积中第$\nu$个因子与第（$n-1-\nu$）个因子相等。故在$n$个因子中，不论$n$是偶数或奇数，均是成对出现的，但如$n$是奇数时，多出一个因子$\operatorname{sn}^2(K,\ k^2)=1$，因此由上式得

$$D=k^n\prod_{\nu=0}^{[n/2]}\operatorname{sn}^2\left[\frac{(2\nu-1)K}{n},\ k^2\right] \tag{11.100}$$

为了使极值问题有解，即能求出（11.85）式中的P_ν^2，须研究$F(u+\Omega_1)=F(u+\omega_1/n)$。为此，要应用如下加法公式

$$\operatorname{sn}(u+v)\operatorname{sn}(u-v)=\frac{\operatorname{sn}^2u-\operatorname{sn}^2v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\operatorname{sn}^2v}$$

函数f相应有

$$f(u+v)f(u-v)=\frac{f^2(u)-f^2(v)}{1-a^2b^2f^2(u)f^2(v)} \tag{11.101}$$

该式由（11.99）式亦可证得。利用（11.96B），（11.97）及（11.101）式得

$$Z=F\left(u+\frac{\omega_1}{n}\right)=(-1)^{n/2}P$$

$$\prod_{\nu=1}^{n/2}f\left[u+\frac{(2\nu-1)\omega_1}{n}\right]f\left[u-\frac{(2\nu-1)\omega_1}{n}\right]$$

$$=P\prod_{\nu=1}^{n/2}\frac{f^2[(2\nu-1)\omega_1/n]-f^2(u)}{1-a^2b^2f^2[(2\nu-1)\omega_1/n]f^2(u)} \tag{11.102}$$

$$P=\left\{\prod_{\nu=1}^{n-1} f\left(\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)\right\}^{-1}$$

式中 $a=1$，$b=k^2$，$f(u)=\mathrm{sn}(u, k^2)$，$\Omega=kz=kf(u)$，$\omega_1=K(k^2)$，$y=tD=DZ/C$，并有

$$1>P_1>P_2>\cdots$$

在（11.102）式中令 $u=0$ 并将（11.102）与（11.85）式比较，得

$$A^{-1}=C=\frac{\prod_{\nu=1}^{[n/2]}\mathrm{sn}^2\left[\frac{(2\nu-1)K}{n}, k^2\right]}{\prod_{\nu=1}^{[n/2]}\mathrm{sn}^2\left(\frac{2\nu K}{n}, k^2\right)}=k^{-n}DP$$

$$'P_\nu=k\,\mathrm{sn}\frac{n-2\nu+1}{n}K,\quad \nu=1, 2, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right] \tag{11.103}$$

这里应用了关系式

$$P^{-1}=\prod_{\nu=1}^{[n/2]}\mathrm{sn}^2\frac{2\nu K}{n}$$

该式由（11.96 A）和（11.97）式证明，考虑到 $\mathrm{sn}K=1$。

再求极值点的位置，这些点是 $\frac{dt}{du}\left(\text{或}\ \frac{dZ}{du}\right)$ 取零值的点，亦即 $t=\pm1$ 或 $Z=\pm A$ 的点，由图11.4（b）得

$$u_s=2\nu\Omega_1=\frac{2\nu K}{n} \tag{11.104}$$

$$\nu=1, 2, , \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

而零点位置

$$u_0=(2\nu-1)\Omega_1=\frac{2\nu-1}{n}K \tag{11.105}$$

至此我们已得到求（11.85）式极值问题的全部结果。现在做一简短小结。

（i）所研究的极值问题的解是可求的，其主要结果示于方程（11.103），（11.100），（11.104），和（11.105）式，它们分别给出了待定常数 P_ν、极值的大小和位置，以及零点的位置。

（ii）所研究的函数 $y(\Omega)$，其 y 和 Ω 通过微分方程（11.89）或（11.92）的解，均表示为中间变量 u 的雅各比函数

$$\Omega = kz = kf(u) = k\,\mathrm{sn}(u, k^2)$$

$$y = tD = \frac{D}{C}Z = \frac{D}{C}F(u + K/n)$$

函数 f 的周期（$4\omega_1$，$2\omega_2$），$\omega_1 = K(k^2)$，$\omega_2 = K'(k^2)$

函数 F 的周期（$4\Omega_1$，$2\Omega_2$），$\Omega_1 = \dfrac{\omega_1}{n}$，$\Omega_2 = \omega_2$。

（iii）可以在 u 平面观察到 $y(\Omega)$ 的分布情况。当 Ω 变化由 $0 \sim k$ 时，u 由 $0 \sim \omega_1 = K$，或 $0 \sim n\Omega_1$。由（11.104）式和图 11.4 知，$u = 2\nu\Omega_1$ 为极点，$F[(2\nu+1)\Omega_1] = \pm A^{-1}$，对应 $y = \dfrac{D}{C}\left(\pm\dfrac{1}{A}\right) = \pm D$。即是说，当 $u = 0$，$\pm 2\Omega_1$，$\pm 4\Omega_1$，…，$\pm n\Omega_1$（n 为偶数）点上，依次有 $y = +D$，$-D$，…；y 的极值在 u 的（$-k$，k）区间上对 0 呈对称分布，共取 $n+1$ 次，而零点数为 n。如在 $F(u+\Omega_1)$ 的周期四边形上看，因自变量为 $u+\Omega_1$，故 $n+1$ 个极值点对 $u = \Omega_1$ 点呈对称分布。

另一种与（11.85）式并列的极值问题是

$$y = \Omega \prod_{\nu=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{P_\nu^2 - \Omega^2}{1 - P_\nu^2\Omega^2} \tag{11.106}$$

$$y = \left(\frac{1}{\Omega}\right) = [y(\Omega)]^{-1}$$

该式的 n 是奇数，而极值问题（11.85）式的 n 为偶数。该问题与（11.85）式一样，同是求 $D = D(P_1^2, P_2^2, \cdots, P_{[n/2]}^2)$ 的极值问题，其中 $0 < P_\nu^2 \leqslant 1$。用完全相同的分析方法，得到微分方程（11.89），再化为等效的二个微分方程（11.92）。但（11.106）式的初始条件是

$$u=0: \quad z=0, \quad \frac{dz}{du}>0; \quad Z=0, \quad \frac{dZ}{du}>0 \qquad (11.107)$$

相应应取$Z=F(u)$（n=奇数），而不是取$Z=F(u+\Omega_1)$（n=偶数）。因此

$$Z=F(u)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}Pf(u)$$

$$\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} f\left(u+\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)f\left(u-\frac{2\nu\omega_1}{n}\right)$$

$$=Pf(u)\prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{f^2(2\nu\omega_1/n)-f^2(u)}{1-a^2b^2f^2(2\nu\omega_1/n)f^2(u)} \qquad (11.108)$$

此式与（11.102）式相对应。

关于（11.106）式极值问题的解，其D和P，仍然是(11.100)和（11.103）式。而极值点位置，此时是

$$u_a=(2\nu+1)\Omega_1=\frac{2\nu+1}{n}K, \quad n=\text{奇数} \qquad (11.109)$$

零点为

$$u_0=2\nu\Omega_1=\frac{2\nu}{n}K \qquad (11.110)$$

此式与（11.104），（11.105）式相对应。

切比雪夫极值问题的一个有效应用是在电子学领域中。例如可以应用上述的分析去逼近滤波器的通带和阻带的特性，得到著名的所谓椭圆函数滤波器的特性。

参 考 资 料

〔1〕 王竹溪，郭敦仁：《特殊函数概论》，科学出版社，1979。

〔2〕 赵进义：《复变函数论》，高等教育出版社，1960。

〔3〕 H. И. 阿希泽尔：《椭圆函数论纲要》，商务印书馆，1956。

〔4〕 沈璿：《椭圆函数概論》，国立编译館（台湾），1982。

〔5〕 Patrick, D. V.: Elliptic Functions and Elliptic Curves, Cambvidge, 1973.

〔6〕 Greenhill, A.G.: The Applications of Elliptic Functions, Dover, 1959

〔7〕 Bowman, F.: Introduction to Elliptic Functions, London, 1953

〔8〕 Lang, S.: Elliptic Functions, London, 1973.

〔9〕 Erdélyi, A.: Higher Transcendental Functions, Vol. Ⅰ, Ⅱ, New York-Toronto-London, 1953.

〔10〕 Henderson, F. M.: Elliptic Functions with Complex Arguments, Michigan, 1960。

〔11〕 Schoeneberg, B.: Elliptic Modular Functions, Springer—Verlag, 1974.

〔12〕 Kober, H.: Dictionary of Conformal Representations, Dover, 1952.

〔13〕 Neville, E. H.: Jacobian Elliptic Functions, Oxford, 1951.

〔14〕 Weil, A.: Elliptic Functions According to Eisentein and Kronecker, Berlin-Springer, 1976.

〔15〕 Ragle, A.: The Elliptic Functions as Thev Should be, Cambridge, 1958.

〔16〕 Masser, D.· Elliptic Functions and Transcendence, Springer—Verlag, New York, 1975.

[General Information]
□□=□□□□□□□□
□□=□□□
□□=291
SS□=10236782
DX□=
□□□□=1991□11□□1□
□□□=□□□□□□□